UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PARABOLICIDADE SOB HIPÓTESES DO DECAIMENTO DA CURVATURA DE RICCI

Lucas Soares Priebe

Porto Alegre/RS

2023

Lucas Soares Priebe

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, área de Geometria Diferencial, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll
Co-Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Barbosa Soares

Porto Alegre/RS
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Carlos André Bulhões Mendes

Vice-Reitor: Patricia Pranke

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Diretor: Elismar da Rosa Oliveira

Vice-diretor: Fernando Hepp Pulgati

PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Coordenador: Rafael Rigão Souza

Vice-Coordenador: Álvaro Kruger Ramos

CIP - Catalogação na Publicação

Priebe, Lucas Soares
PARABOLICIDADE SOB HIPÓTESES DO DECAIMENTO DA CURVATURA DE RICCI / Lucas Soares Priebe. -- 2023.
69 f.
Orientador: Jaime Bruck Ripoll.

Coorientador: Rodrigo Barbosa Soares.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. Variedade Riemanniana. 2. Submersão. 3. Bishop-Gromov. 4. p-parabólica. I. Ripoll, Jaime Bruck, orient. II. Soares, Rodrigo Barbosa, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lucas Soares Priebe

PARABOLICIDADE SOB HIPÓTESES DO DECAIMENTO DA CURVATURA DE RICCI

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Matemática, área de Geometria Diferencial, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovado em 26 de novembro de 2023:

Jaime Bruck Ripoll, Dr. (UFRGS)

Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)

Lisandra de Oliveira Sauer, Dr. (UFPel)

Marcos Dajczer, Dr. (IMPA)

gov.br Documento assinado digitalmente
RODRIGO BARBOSA SOARES
Data: 02/12/2023 09:52:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Rodrigo Barbosa Soares, Dr. (FURG)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me iluminar nessa caminhada e por colocar em minha vida estas pessoas que citarei a seguir.

À minha família, em especial meus pais Vilmar Müller Priebe e Laura Jane Soares Priebe, por todo apoio e carinho que me concedem.

À minha namorada Camila, por estar sempre ao meu lado e dividindo bons momentos e sendo meu conforto em momentos de dificuldade.

A todos professores que contribuíram para a construção do meu conhecimento ao longo da vida escolar e acadêmica.

Aos meus orientadores, Jaime Ripoll e Rodrigo Soares, por aceitarem me orientar, por toda dedicação e paciência me guiando e compartilhando seus conhecimentos durante a pesquisa.

À banca por ter aceitado ler este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Abstract

This work presents results on $p-$parabolicity, with $p > 1$, for a complete Riemannian manifold M, in terms of the decay of its Ricci curvature. Furthermore, the concept of (G, p)–parabolicity is defined, where G is a group of isometries of M, and it is obtained a criterion for (G, p)–parabolicity and an application in the case of the Riemannian manifold $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Keywords: Riemannian manifold, submersion, Bishop–Gromov, $p-$parabolic.

Resumo

Neste trabalho são apresentados, resultados sobre $p-$parabolicidade com $p > 1$, para uma variedade Riemanniana completa M em termos do decaimento de sua curvatura de Ricci. Além disso, é introduzido o conceito de (G, p)–parabolicidade, onde G é um grupo de isometrias de M, e é obtido um critério para (G, p)–parabolicidade e uma aplicação no caso da variedade Riemanniana $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Palavra-chave: Variedade Riemanniana, Submersão, Bishop–Gromov, $p-$parabólica.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dado $p > 1$, o $p-$Laplaciano Δ_p em M é definido por

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^{2-p}}\right), \ u \in C^2\left(M\right).$$

Para $p = 2$, é o operador Laplaciano usual, onde div e ∇ representam o divergente e o gradiente na métrica de M.

Uma função $u \in C^1\left(M\right)$ é dita $p-$superharmônica se $\Delta_p(u) \leq 0$ (no sentido das distribuições). M é dita p-parabólica, para algum $p > 1$, se qualquer supersolução para o p-laplaciano limitada inferiormente é constante.

A existência de funções $p-$harmônicas ou $p-$sub/superharmônicas, não constantes, em uma variedade Riemanniana completa, é um problema que vem sendo estudado há muito tempo. Em diversas situações, esta questão envolve hipóteses sobre a curvatura de Ricci de M. Um artigo clássico sobre este tema, no caso $p = 2$, é [14] de 1975, onde é provado, usando estimativas de gradiente, que toda função harmônica positiva em uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa deve ser constante. Nessas condições, M satisfaz uma propriedade do tipo Liouville, ou seja, toda $p-$harmônica limitada inferiormente é constante. A respeito disso, é importante salientar que essa condição de [14] não pode ser estendida para $2-$parabolicidade, tendo em vista que $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, não é $2-$parabólico.

Ainda em 1975, o trabalho [4] obteve resultados de não existência, com $p = 2$, para funções superharmônicas positivas, com hipóteses envolvendo volume de bolas geodésicas e curvatura de Ricci não negativa, fora de conjuntos compactos de uma variedade Riemanniana completa.

Em [11] e [12], os autores apresentam resultados do tipo Liouville para o caso de funções $p-$subharmônicas, em espaços L^q com $q > 0$ e também para funções de classe C^2, utilizando hipóteses relacionadas à curvatura de Ricci e ao volume. Este é um dos trabalhos que destaca a importância das funções $p-$harmônicas para a compreensão da geometria de M.

Os principais resultados deste trabalho envolvem a condição de $p-$parabolicidade, e nesse sentido, um trabalho que deve ser mencionado aqui é [13], onde é encontrado um critério utilizando curvatura seccional e valores de p dependentes de n e de uma constante maior que 1, mais precisamente,

(Proposição 1 de [13]) Suponha que exista uma constante $c > 1$ e um conjunto compacto $K \subset M$ de tal modo que

$$K_M(P) \geq \frac{-c(c-1)}{d^2(x)}$$

para todo $x \in M \backslash K$ e todo subespaço bidimensional $P \subset T_xM$, que contém o vetor radial $\nabla d(x)$, onde $d(x)$ é a distância até um ponto fixo o de M. Suponha que $p \geq 1 + (n-1)c$. Então M é $p-$parabólica.

A demonstração do resultado acima é baseada no:

(Teorema 5.16 de [7]) Seja $1 < p < \infty$ e suponha que

$$\int^{\infty} \left(\frac{t}{V(t)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty$$

ou

$$\int^{\infty} \frac{dt}{V'(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \infty$$

onde $V(t)$ é o volume da bola geodésica centrada em um ponto fixo o de M e com raio

t. Então M é $p-$parabólica.

Mais recentemente, o artigo [3] obteve resultados de existência para o p-Laplaciano, com p em $(2, n)$, onde n é a dimensão da variedade ambiente. Em particular, existem funções $p-$harmônicas não constantes e limitadas em M. Além disso, no mesmo texto, é apresentado um critério de p-parabolicidade, em termos da curvatura seccional radial limitada inferiormente por uma função negativa que depende da distância $d(x)$, de x a um ponto fixo, e tende a zero mais rapidamente do que na Proposição 1 de [13] mas, contudo, contempla o caso $p = n$. Cujo enunciado é:

(Teorema 5.1 de [3]) Seja $\alpha > 0$ uma constante e assuma que M é uma variedade Riemanniana $n-$dimensional completa cujas curvaturas seccionais radiais satisfazem

$$K_M(P_x) \geq -\frac{\alpha}{d^2(x)\ln(d(x))},$$

para todo x fora de algum conjunto compacto e todo subespaço bidimensional $P_x \subset T_xM$, contendo $\nabla d(x)$. Então M é p-parabólica

(a) se $p = n$ e $0 < \alpha \leq 1$;

ou (b) se $p > n$ e $\alpha > 0$.

Uma das contribuições deste trabalho, no sentido de $p-$parabolicidade, consta em ampliar os resultados seguintes: Teorema 5.1 de [3] e Proposição 1 de [13], os quais estão fundamentados sob suposições da curvatura seccional. Para tal feito, é exibido uma relação entre a curvatura de Ricci e crescimento do volume, e consequentemente, são obtidos resultados sobre valores de p com hipóteses baseadas no decaimento da curvatura de Ricci. Dentre estes cálculos, agradece-se ao Professor Detang Zhou, que sugeriu Lemas 2.1.9, 2.1.5 e suas provas.

O Capítulo 2 de [10], página 17, apresenta um resultado sob o decaimento da curvatura no seguinte sentido: Sejam M é uma variedade Riemanniana completa, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em M e $\mathcal{R}_{ij}$ o tensor definido por

$$\mathcal{R}_{ij}(x) = \sum_{k}^{n} \langle R(E_i, E_k)E_j, E_k \rangle (x).$$

Suponha que exista $o \in M$, tal que

$$\mathcal{R}_{ij}(x) \geq \frac{1}{4d(x)},$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$, todo $x \in M$, onde $d(x)$ é a distância de x até o. Então M é compacta.

Segue deste resultado que tais variedades são $p-$parabólicas para todo $p > 1$. Além disso, $\mathrm{Ric}_x(v) = \frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{4(n-1)d(x)}$. Neste caso, cabe o seguinte questionamento: qual o comportamento de M, com relação a $p-$parabolicidade, no caso em que a curvatura de Ricci se aproxima de zero? Uma possível resposta a esta pergunta vem com o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dado $\alpha > 0$, suponha que exista $o \in M$ tal que a curvatura de Ricci satisfaz*

$$\mathrm{Ric}_x(v) \geq \alpha \,\mathrm{sech}^2(d(x)),$$

para todo $x \in M \backslash B_R(o)$, todo $v \in T_xM$, $\|v\| = 1$, e para algum $R > 0$, sendo $d(x)$ a função distância de x até o. Então M é $p-$parabólica, para qualquer $p > 1$.

No caso de curvaturas negativas, na mesma linha do resultado da Proposição 1 de [13], são obtidas condições que melhoram o decaimento da curvatura e também a substituição da curvatura seccional pela curvatura de Ricci. Para ver mais claramente a relação entre o próximo resultado e a Proposição 1 de [13], é conveniente introduzir a função $h : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$h_\alpha(r) := \frac{\alpha(\alpha+1)r^\alpha}{r^\alpha - 1} = \alpha(\alpha+1)\frac{r^\alpha}{r^\alpha - 1} > \alpha(\alpha+1).$$

Nestas condições é apresentado o:

Teorema 1.0.2 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dado $\alpha > 0$, defina*

$$h_\alpha(r) = \frac{\alpha(\alpha+1)r^\alpha}{r^\alpha - 1}. \tag{1.1}$$

Suponha que exista $o \in M$ tal que a curvatura de Ricci satisfaça

$$\mathrm{Ric}_x(v) \geq -\frac{h_\alpha(d(x))}{d(x)^2},$$

para todo $x \in M \backslash B_R(o)$, todo $v \in T_xM$, $\|v\| = 1$, e para algum $R > 0$, sendo $d(x)$ a função distância de x até o. Então M é $p-$parabólica, para qualquer $p \geq (\alpha+1)(n-1)+1$.

Outra etapa deste trabalho é a relação entre variedades Riemannianas quocientadas por um grupo, $p-$parabolicidade e os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2 citamos acima. Em outras palavras, são procuradas condições sobre uma variedade Riemanniana M e sobre G, um subgrupo do grupo de isometrias agindo livremente e propriamente em M, de tal maneira que seja possível aplicar os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2 na variedade Riemanniana quociente M/G.

Desta maneira, este trabalho apresenta um novo conceito a ser estudado em variedades Riemannianas, o qual é denominado $(G,p)-$parabolicidade. Mais precisamente:

Definição 1.0.3 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo do grupo de isometrias de M, agindo livremente e propriamente em M. Considere em M/G a métrica riemanniana tal que a projeção $\pi : M \to M/G$ seja uma submersão riemanniana. Dado $p > 1$, M é dita $(G,p)-$parabólica se M/G é p-parabólica.*

Note que esta definição estende de maneira óbvia a definição usual: M é $p-$parabólica se, e somente se, M é $(G,p)-$parabólica com $G = Id_M$.

Como o conceito de submersão Riemanniana aparece na Definição 1.0.3, uma ferramenta necessária para o estudo de $(G,p)-$parabólicidade, são os tensores fundamentais T e A de uma submersão, cujas definições podem ser encontradas com mais detalhes no decorrer do texto. Por enquanto, esses objetos serão definidos por meio de projeções vertical e horizontal $v : \mathcal{X}(M) :\longrightarrow \mathcal{X}^v(M)$, $h : \mathcal{X}(M) :\longrightarrow \mathcal{X}^h(M)$, de acordo com as fórmulas:

$$T(E,F) = T_E F = (\nabla_{E^v} F^v)^h + (\nabla_{E^v} F^h)^v,$$

$$A(E,F) = A_E F = (\nabla_{E^h} F^v)^h + (\nabla_{E^h} F^h)^v,$$

para qualquer $E, F \in \mathcal{X}(M)$, onde ∇ denota a conexão Riemanniana de M.

Como base nestas definições, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 1.0.4 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo do grupo de isometrias de M, agindo livremente e propriamente em M. Considere em M/G a métrica riemanniana tal que a projeção $\pi : M \to M/G$ seja uma submersão riemanniana. Seja $\{X_i, U_j\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k}$ um referencial ortonormal de M, onde X_i é um campo horizontal e U_j um campo vertical. Dado $\alpha > 0$, suponha que existe $o \in M$ tal que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

a) $(n-1)\operatorname{Ric}_q(X) \geq \alpha(k-1)\operatorname{sech}^2(d(x)) + kg(\nabla_X \vec{H}, X) - 2\sum_i g(A_X X_i, A_X X_i)$
$-\sum_j g(T_{U_j} X, T_{U_j}, X)$,

ou

b) $(n-1)\operatorname{Ric}_q(X) \geq -(k-1)h_\alpha(d(x)) + kg(\nabla_X \vec{H}, X) - 2\sum_i g(A_X X_i, A_X X_i)$
$-\sum_j g(T_{U_j} X, T_{U_j}, X)$,

para todo $x \in M \backslash B_R(o)$, todo $X \in T_x M$, para algum $R > 0$, onde $X' = d\pi_x(X)$, $\vec{H}$ é o vetor curvatura média da órbita que passa por x, $d(x)$ a distância de x até o, e com h_α definida em (1.1). Então, M/G é $(G,p)-$parabólica, para todo $p > 1$ se (a) ocorre e $p \geq (\alpha+1)(n-1)+1$ se Ricci satisfaz (b) .

Não foi possível explorar todo possível potencial deste teorema, sendo apresentada uma aplicação para o Teorema 1.0.4, mais especificamente no caso (a), apenas no caso de M sendo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2$ o plano hiperbólico de curvatura -1, e G um subgrupo do grupo de isometrias do tipo helicoidal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja Proposição 4.2.1).

Este fato é um tanto quanto instigante e abre um campo de estudos a ser pesquisado futuramente, investigando propriedades sobre uma variedade Riemanniana M e sobre o grupo G, de tal maneira que a variedade Riemanniana quociente M/G seja $p-$parabólica.

A metodologia usada neste trabalho consiste em destinar o Capítulo 2 para conceitos geométricos de variedades Riemannianas. Em particular, propriedades sobre o volume de bolas geodésicas e sua relação com a curvatura de Ricci e com os Tensores Fundamentais de uma Submersões. No Capítulo 3, é realizada a demonstração dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2. Por fim, no Capítulo 4 é apresentada a definição de variedade Riemanniana $(G, p)-$parabólica, juntamente com a prova do Teorema 1.0.4 e sua aplicação no caso da variedade $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ munido com o grupo G, sendo este um subgrupo do grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ agindo livremente e propriamente em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Preliminares

Um dos tipos de variedades riemanninas mais utilizadas em teoremas de comparação, são as variedades Riemannianas rotacionalmente simétricas. Nesta perspectiva, um resultado bem conhecido no âmbito de comparar volume é Teorema de Bishop–Gromov, o qual compara volume de uma variedade Riemanniana completa de curvatura Ric $\geq (n-1)K$, com o volume de uma variedade rotacionalmente simétrica de curvatura radial K.

Esta seção descreve uma estimativa para o crescimento do volume com relação a curvatura de Ricci, onde essa é limitada inferiormente por uma função não necessariamente constante. Com base neste resultado, é caracterizado uma condição de $p-$parabolicidade com hipótese do comportamento da curvatura de Ricci no infinito.

2.1 Conceitos de variedades Riemannianas

A primeira seção deste Capítulo é destinado a descrever conceitos clássicos de variedades Riemannianas, os quais são essenciais para desenvolver o trabalho.

2.1.1 Ricci e Volume

Considere M uma variedade Riemanniana completa de dimensão n e seja

$$\mathbb{S}_o^{n-1} = \{v \in T_oM; |v| = 1\},$$

onde $o \in M$.

Definição 2.1.1 *Seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco, com $\gamma(0) = o$ e $\gamma'(0) = v$. Por definição,*

$$t_0(\gamma) := t_0(v) := \sup\{t > 0; t = d(o, \gamma(t))\}.$$

Definição 2.1.2 *(Cut locus). Seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco, com $\gamma(0) = o$ e $t_0(\gamma) < \infty$. Então $\gamma(t_0(\gamma))$ é chamado o cut point de o ao longo de γ. O conjunto $C_T(o)$, formado por todos os cut points de o, é chamado de cut locus de o. Por definição,*

$$C_T(o) := \{t_0(v)v; v \in \mathbb{S}_o^{n-1}, t_0(v) < \infty\} \subset T_oM$$

é denominado por cut locus tangente a o.

Observe que γ é minimizante no intervalo $[0, t_0(\gamma)]$.

Proposição 2.1.3 *Seja $o \in M$. Defina os conjuntos*

$$U_o := \{(v, t); v \in \mathbb{S}_o^{n-1},\ 0 < t < t_0(v)\} \quad e \quad V = \ M \backslash (\{o\} \cup C(o)).$$

Então $F : U_o \to V$, $F(v, t) = \exp_o(tv)$ é um difeomorfismo.

Prova. Primeiramente, dados $(t_1, v_1), (t_2, v_2) \in U_o$, se $\exp_o(t_1v_1) = \exp_o(t_2v_2)$, então

$$t_1 = d(\exp_o(t_1v_1), o) = d(\exp_o(t_2v_2), o) = t_2.$$

Desta maneira, mostrar a injetividade de F é equivalente a mostrar que, para todos $(t, v), (t, w) \in U_o$, se $v \neq w$ então $\exp_o(tv) \neq \exp_o(tw)$.

Suponha por contradição que F não seja injetiva, ou seja, existe $(l, v), (l, w) \in U_o$ tal que $\exp_o(lv) = \exp_o(lw)$, com $v \neq w$. Para facilitar a notação, denote $\gamma_v(t) = \exp_o(tv)$ e $\gamma_w(t) = \exp_o(tw)$.

Sejam, $\delta > 0$ tal que $\min\{t_0(v), l\} > \delta$ e $B_{\gamma_v(l)}(\delta)$ seja uma bola totalmente normal, então $\gamma_w(t-\delta), \gamma_v(t+\delta) \in \partial B_{\gamma_w(\delta)}(\delta)$.

Sendo M é uma variedade Riemanniana completa, existem, uma geodésica γ_δ parametrizada por comprimento de arco e $t_\delta > 0$, tal que $\gamma_\delta(0) = \gamma_w(l-\delta)$ e $\gamma_\delta(t_\delta) = \gamma_v(l+\delta)$. E por consequência, $t_\delta = d(\gamma_w(t-\delta), \gamma_v(t_0(v))$.

Defina a curva $c : [0, l-\delta+t_\delta] \to M$ como

$$c(t) = \begin{cases} \gamma_w(t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq l-\delta \\ \gamma_\delta(t-(l-\delta)) & \text{se} \quad l-\delta \leq t \leq l-\delta+t_\delta \end{cases}.$$

Utilizando a desigualdade triangular,

$$l(c) = l(\gamma_w(t))_{|[0,l-\delta]} + l(\gamma_\delta(t))_{|[0,t_\delta]} = l-\delta+t_\delta \leq l+\delta = l(\gamma_v(t))_{|[0,l+\delta]}.$$

Note que, $l(c) < l(\gamma_v(t))_{|[0,l+\delta]}$ gera um absurdo, pois $\gamma_v(t)$ é geodésica minimizante em $[0, t_0(v)]$.

Já o caso $l(c) = l(\gamma_v(t))_{|[0,t_0(v)]}$, implica que

$$\gamma_\delta(t) = \begin{cases} \gamma_w(t+l-\delta), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \delta \\ \gamma_v(t+l), & \text{se} \quad \delta \leq t \leq l+\delta \end{cases},$$

ou seja, $\gamma_w = \gamma_v$, o que é absurdo. Logo, F é injetiva.

A sobrejetividade de F, vem do fato de M ser completa, ou seja, para todo $q \in M$, pelo Teorema de Hopf e Rinow, existe uma geodésica γ ligando o a q tal que $l(\gamma) = d(q, o)$.

E por fim, a diferenciabilidade de F segue direto da diferenciabilidade de $\exp_o$ em $B_{\gamma(tv)}(\delta)$. ■

A seguir serão descritos alguns resultados em variedades Riemannianas que são semelhantes a resultados clássicos em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.4 *Um conjunto $A \subset M$ é um conjunto de medida nula, se existe um conjunto de índices $I \cong \mathbb{N}$ e $\phi_i : U_i \subset M \to U_i' \subset \mathbb{R}^n$ cartas locais, tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e* *para todo $i \in I$, $\phi_i(A \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de medida nula, com respeito a medida Lebesgue, em $\mathbb{R}^n$.*

Lema 2.1.5 *Sejam N uma variedade e $F : M \to N$ suave. Se $A \subset M$ é um conjunto de medida nula, então $F(A) \subset N$ também é um conjunto de medida nula. Além disso, $f : M \to R$ é integrável e $A \subset M$ é um conjunto de medida nula, então*

$$\int_M f ds = \int_{M \setminus A} f ds.$$

A demonstração do lema acima é análoga ao caso do $\mathbb{R}^n$.

Corolário 2.1.6 *Seja $o \in M$. Então $C_T(o) \subset T_oM$ e $C(o) = \exp_o(C_T(o)) \subset M$ são conjuntos de medidas nula. Além disso, se $V = M \setminus (\{o\} \cup C(o))$, então*

$$\mathrm{Vol}(B_R(o)) = \mathrm{Vol}(B_R(o) \cap V)$$

Prova. A demonstração deste corolário é uma aplicação do Lema 2.1.5. Para mostrar que $C_T(o)$ tem medida nula basta considerar $T : T_oM \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação bijetiva. Desta maneira, segue que $T^{-1}(C_T(o)) \subset \mathbb{R}^n$, o qual tem medida nula. Para a segunda afirmação, uma vez que $\exp_p$ é diferenciável, $C(o) = \exp_o(C_T(o))$ tem medida nula.

Para a última afirmação, utilizando o Lema 2.1.5, temos que

$$\begin{aligned} B_R(o) &= \int_{B_R(o)} ds \\ &= \int_{B_R(o)\cap M} ds \\ &= \int_{(B_R(o)\cap M)\setminus(\{o\}\cup C(o))} ds \\ &= \int_{B_R(o)\cap V} ds \\ &= \mathrm{Vol}(B_R(o) \cap V). \end{aligned}$$

■

Tendo em vista cálculos futuros, a definição da Jacobiana de uma aplicação diferenciável em variedades Riemannianas será primordial para escrever o volume de bolas geodésicas.

Definição 2.1.7 *Sejam $q \in M$ e $X_1, \ldots, X_n \in T_qM$ uma base. Por definição*

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i X_i;\ t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \right\}$$

é o paralelepípedo de arestas $X_1, \ldots, X_n$.

Definição 2.1.8 *Sejam M e N variedades Riemannianas, $F : M \to N$ um difeomorfismo, $q \in M$ e $p = F(q)$. Então, defina*

$$\operatorname{Jac} F(q) := \frac{\operatorname{vol}(dF_q(X_1(p)) \wedge \ldots \wedge dF_q(X_n(p)))}{\operatorname{vol}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_m)},$$

como sendo o Jacobiano de F em q.

Lema 2.1.9 *Sob as hipóteses acima,*

$$\operatorname{vol}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_m) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_j \rangle)}$$

e $\operatorname{Jac} F(q)$ não dependem da escolha da base $X = \{X_1, ..., X_m\}$.

Prova. Consideramos $\{e_i, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva em T_qM, escrevendo X_i nesta base,

$$X_i = \sum_j a_{i,j} e_j.$$

Consequentemente,

$$\langle X_i, X_j \rangle = \sum_k a_{i,k} a_{j,k} = a_{i,j}^2,$$

onde $a_{i,j}^2$ é o elemento da $i-$ésimo linha e $j-$ésimo coluna da matriz $(a_{i,j})^2$.

Como o volume do paralelepípedo, formado pelos vetores $\{X_1, \ldots, X_n\}$ em T_qM, é igual a $\operatorname{vol}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz $(a_{i,j})$, segue que

$$\operatorname{vol}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_m) = \det(a_{i,j}) = \sqrt{\det\left(\langle X_i, X_j \rangle\right)}.$$

Por fim, dada outra base $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\} \subset T_qM$, tem-se

$$Y_i = \sum_j b_{i,j} X_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m) &= \sqrt{\det \langle Y_i, Y_j \rangle} \\
&= \sqrt{\det \langle \sum_l b_{i,l} X_l, \sum_k b_{j,k} X_k \rangle} \\
&= \sqrt{\det \left(\sum_l b_{i,l} \left(\sum_k b_{j,k} \langle X_l, X_k \rangle \right) \right)} \\
&= \sqrt{\det \left((b_{i,l})^T (b_{j,k})^T (\langle X_l, X_k \rangle) \right)} \\
&= \det(b_{j,k}) \sqrt{\det \left(\langle X_l, X_k \rangle \right))}
\end{aligned}$$

Por outro lado, de maneira análoga

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(dF_p(Y_1) \wedge \ldots \wedge dF_p(Y_n)) &= \sqrt{\det \langle dF_p(Y_i), dF_p(Y_j) \rangle} \\
&= \sqrt{\det \left\langle \sum_l b_{i,l} dF_p(X_l), \sum_k b_{j,k} dF_p(X_k) \right\rangle} \\
&= \det(b_{j,k}) \sqrt{\langle dF_p(X_l), dF_p(X_j) \rangle}
\end{aligned}$$

.

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Jac}_Y F(q) &= \frac{\det(b_{j,k}) \sqrt{\det \left(\langle dF_p(X_l), dF_p(X_j) \rangle \right)}}{\det(b_{j,k}) \sqrt{\det \left(\langle X_l, X_k \rangle \right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\det \left(\langle dF_p(X_l), dF_p(X_j) \rangle \right)}}{\sqrt{\det \left(\langle X_l, X_k \rangle \right)}} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(dF_q(X_1) \wedge \ldots \wedge dF_q(X_m))}{\mathrm{vol}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_m)} \\
&= \mathrm{Jac}_X F(q),
\end{aligned}$$

o que garante que o operador $\operatorname{Jac} F(q)$ não depende da base. ■

Teorema 2.1.10 *Sejam M, N variedades Riemannianas e $F : M \to N$ um difeomorfismo. Se $f : N \to R$ integrável, então $(f \circ F) \operatorname{Jac} F : M \to R$ é integrável e*

$$\int_M (f \circ F) \operatorname{Jac} F ds_M = \int_N f ds_N.$$

Prova. Ver [2] ■

Com base no teorema anterior, será descrita uma maneira de obter o volume de bolas geodésicas.

Teorema 2.1.11 *Sejam $R \geq 0$, $o \in M$ e $v \in \mathbb{S}_o^{n-1}$. Considere γ_v uma geodésica com $\gamma_v(0) = o$, $\gamma_v'(0) = v$, e $\{X_1 := v, X_2, ..., X_n\}$ uma base de T_oM. Seja $J_2(t), \ldots, J_n(t)$ campos de jacobi ao longo de γ, com $J_i = 0$ e $J_i'(0) = X_i$. Se*

$$J_v(0) : [0, t_0(v)] \to R, \qquad J_v(t) = \operatorname{vol}(t)(J_2 \wedge \ldots \wedge J_n),$$

então

$$\operatorname{Vol}(B_R(o)) = \int_{\mathbb{S}_o^{n-1}} \int_0^{\min\{R, t_0(v)\}} J_v(t) dt dv.$$

Prova. Sendo $F : U_o \to V$, conforme definido na Proposição 2.1.3, e utilizando o Corolário 2.1.6 segue que

$$\operatorname{Vol}(B_R(o)) = \operatorname{Vol}(B_R(o) \cap V) = \int_{B_R(o) \cap V} ds = \int_V \chi_{(0,R)} \circ d(s, o) ds,$$

onde $d(s, o)$ é função distância de s até o. Desta maneira, defina $f(s) = \chi_{(0,R)} \circ d(s, o)$ no Teorema 2.1.10,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(B_R(o)) &= \int_V \chi_{(0,R)} \circ d(s, o) ds \\
&= \int_{U_0} (\chi_{(0,R)} \circ d(s, o) \circ F(t, v)) \operatorname{Jac} F(t, v) dt dv \\
&= \int_{U_0} \chi_{(0,R)}(t) \operatorname{Jac} F(t, v) dt dv \\
&= \int_{\mathbb{S}_o^{n-1}} \int_0^{t_0(v)} \chi_{(0,R)}(t) \operatorname{Jac} F(t, v) dt dv,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{Vol}(B_R(o)) \quad = \quad \int_{\mathbb{S}_o^{n-1}} \int_0^{\min\{R,t_0(v)\}} \mathrm{Jac}\, F(t,v) dt dv. \tag{2.1}$$

Como definido anteriormente,

$$\mathrm{Jac}\, F(q) = \frac{\mathrm{Vol}(dF_q(E_1(q)) \wedge \ldots \wedge dF_q(E_n(q)))}{Vol(E_1(q) \wedge \ldots \wedge E_n(q))},$$

com $\{E_1, \ldots, E_n)\}$ uma base de T_qM, é preciso calcular $\mathrm{Vol}(dF_q(E_1(q)) \wedge \ldots \wedge dF_q(E_n(q)))$ e $Vol(E_1(q) \wedge \ldots \wedge E_n(q))$.

Por outro lado, dado $(t, v) \in U_0$, sendo $E_i \in \mathbb{S}_o^{n-1}$ dado no enunciado, defina

$$c(t) = \begin{cases} (t+s, v), & \text{se} \quad i = 1 \\ (t, v + sE_i), & \text{se} \quad i \geq 2 \end{cases},$$

para $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $i \geq 2$, de tal maneira que $\alpha_i(s) \in U$. Deste modo, segue que $\{\alpha_i'(0)\}_{1 \leq i \leq n}$ gera uma base de $T_t\mathbb{R} \times T_v\mathbb{S}_o^{n-1} \cong T_{(t,v)}U_0$.

Observe que

$$\begin{aligned} dF_q(\alpha_1'(0)) &= \frac{\partial}{\partial s} F \circ \alpha_1|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \exp_o((t+s)v)|_{s=0} \\ &= \gamma_v'(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} dF_q(\alpha_i'(0)) &= \frac{\partial}{\partial s} F \circ \alpha_i|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \exp_o(t(v + sE_i))|_{s=0} \\ &= J_i(t), \end{aligned}$$

onde $J_i(t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma_v(t)$, com $J_i(0) = \vec{0}$ e $J_i'(0) = E_i$

Logo,

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac} F(t,v) &= \frac{\mathrm{Vol}(dF_q(\alpha_1'(0)) \wedge \ldots \wedge dF_q(\alpha_n'(0)))}{Vol(v \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n)} \\ &= \mathrm{Vol}(\gamma_v'(t) \wedge J_2 \wedge \ldots \wedge J_n).\end{aligned}$$

Repare que, pelo Lema 2.1.9, sendo

$$a_{ij} = \begin{cases} \langle \gamma_v'(t), \gamma_v'(t) \rangle, & se \quad i = j = 1 \\ \langle \gamma_v'(t), J_{\max\{i,j\}}(t) \rangle, & se \quad i = 1 \ e \ j \geq 2 \ ou \ i \geq 2 \ e \ j = 1 \\ \langle J_i(t), J_j(t) \rangle, & se \quad i \geq 2 \ e \ j \geq 2 \end{cases}$$

segue que

$$\mathrm{Vol}(\gamma_v'(t), J_2 \wedge \ldots \wedge J_n)) = \sqrt{\det([a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n})}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle \gamma_v'(t), J_i(t) \rangle &= \langle \gamma_v'(0), J_i'(0) \rangle t + \langle \gamma_v'(0), J_i(0) \rangle \\ &= \langle v, E_i \rangle t + \langle v, \vec{0} \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, $\det([a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}) = \det([a_{ij}])_{2 \leq i,j \leq n})$ e consequentemente

$$\operatorname{Jac} F(t,v) = \mathrm{Vol}(\gamma_v'(t), J_2 \wedge \ldots \wedge J_n)) \;=\; \mathrm{Vol}(J_2 \wedge \ldots \wedge J_n). \tag{2.2}$$

Logo, pelos resultados (2.1) e (2.2) tem-se

$$\mathrm{Vol}(B_R(o)) = \int_{\mathbb{S}_o M} \int_0^{\min\{R, t_0(v)\}} J_v(t) dt dv,$$

concluindo a demonstração. ■

Levando em conta a fórmula para o volume das bolas geodésicas, os próximos resultados serão destinados a relacionar volume com a curvatura de Ricci. Para isto, é necessária as seguintes definições.

Definição 2.1.12 *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e γ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, definida no intervalo I. Considere $End(\gamma^{\perp})$ o conjunto de todos os campos de endomorfismos simétricos, ou seja, o conjunto de todas as aplicações que a cada valor de $t \in I$, associa U_t um operador linear simétrico, definido em $(\gamma'(t))^{\perp}$.*

Definição 2.1.13 *(Equação e solução de Riccati) Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $\gamma : [0, t_0(\gamma)] \to M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, com $\gamma(0) = o$ e $\gamma'(0) = v$. Considere $U \in End(\gamma^{\perp})$, um campo de endomorfismos simétricos, $R := R_v := R(\ ,\gamma')\gamma'^{\perp} \in End(\gamma^{\perp})$ e denote por*

$$U' + U^2 + R = 0$$

a Equação de Riccati, onde U' indica a derivada no sentido de tensores. Será dito que $U \in End(\gamma^{\perp})$ é solução da Equação de Riccati, se

$$\forall X \in \mathcal{X}(\gamma^{\perp}) : U'(X) + U^2(X) + R(X) = 0.$$

Teorema 2.1.14 *(Equação de Riccati e Jacobi). Sejam $\gamma : [0, t_0(\gamma)] \to M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, $E_1 = \gamma'$ e $\{E_2, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal para $(\gamma'(0))^{\perp}$. Para $2 \leq i \leq n$, seja J_i o campo de jacobi ao longo de γ, satisfazendo*

$$J_i(0) = 0 \qquad e \qquad J_i'(0) = E_i.$$

Defina o tensor $J_t : \gamma'(t)^{\perp} \to \gamma'(t)^{\perp}$, ao longo de γ, por

$$J_t\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_i\right) := \sum_{i=2}^{n} \alpha_i J_i. \tag{2.3}$$

Então o endomorfismo $J = J_t$ é solução da equação de Jacobi $J'' + RJ = 0$ e

$$U_t := J_t' \circ J_t^{-1}.$$

é uma solução simétrica da equação de Riccati.

Prova. Note que, em $(0, t_0(\gamma))$, $\exp_o$ não possui pontos conjugados. Portanto, $\{J_i\}_{i=2\ldots n}$ é uma base para $(\gamma')^\perp$, o que resulta em J_t ser invertível em $(0, t_0(\gamma))$. A notação J_t' indica a derivada tensorial de ordem 1 e J_i' indica a derivada dos campos de Jacobi.

Observe que

$$(J_t(E_i))' = \nabla_{\gamma'}(J_t(E_i)) = \nabla_{\gamma'} J_i = \frac{D}{dt} J_i = J_i'$$

e de maneira análoga $(J_t(E_i))'' = J_i''$. Assim,

$$(J_t(E_i))'' + R_t \circ J_t(E_i) = D_t^2 J_i + R(J_i, \gamma')\gamma' = 0.$$

E como J_t é linear, segue que $J = J_t$ é solução da equação de Jacobi.

Para mostrar que $U_t := J_t' \circ J_t^{-1}$ é solução da Equação de Riccati,

$$\begin{aligned}
U_t'(Y) &= (U_t(Y))' - U_t(Y') \\
&= (J_t'(J_t^{-1}(Y)))' - J_t'(J_t^{-1}(Y')) \\
&= J_t''(J_t^{-1}(Y)) + J_t'((J_t^{-1})'(Y)) + J_t'(J_t^{-1}(Y')) - J_t'(J_t^{-1}(Y')) \\
&= -R_t(J_t)(J_t^{-1}(Y)) + J_t'((J_t^{-1})'(Y)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(J_t^{-1}(Y))' &= (J_t^{-1}(J_t(J_t^{-1}((Y)))))' \\
&= (J_t^{-1})'(J_t(J_t^{-1}(Y))) + J_t^{-1}(J_t'(J_t^{-1}(Y))) + J_t^{-1}(J_t(J_t^{-1}(Y))'
\end{aligned}$$

o que implica em

$$(J_t^{-1})'(Y) \;\; = \;\; -J_t^{-1}(J_t'(J_t^{-1}(Y))).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
U_t'(Y) &= -R_t(J_t)(J_t^{-1}(Y)) + J_t'((J_t^{-1})'(Y)) \\
&= -R_t(J_t(J_t^{-1}(Y))) + J_t'(-J_t^{-1}(J_t'(J_t^{-1}(Y)))) \\
&= -R_t(Y) - U_t^2(Y).
\end{aligned}$$

Portanto, U_t é solução da equação de Riccati.

Para garantir a simetria de U são necessárias duas observações:

Observação 2.1.15 *Sejam J_t^* e $(J_t')^*$ os operadores adjuntos dos operadores J_t e (J_t'), respectivamente. Então*

$$(J_t^*)' = (J_t')^*.$$

De fato, dados $X, Y \in (\gamma'(t))^\perp$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle (J_t')^*(X), Y\rangle &= \langle X, J_t'(Y)\rangle \\
&= \langle X, (J_t(Y))' - J_t(Y')\rangle \\
&= \langle X, (J_t(Y))'\rangle - \langle X, J_t(Y')\rangle \\
&= \langle X, (J_t(Y))'\rangle - \langle J_t^*(X), Y'\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\langle X, J_t(Y)\rangle - \langle X', J_t(Y)\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\langle J_t^*(X), Y\rangle + \langle (J_t^*)'(X), Y\rangle \\
&= -\langle X', J_t(Y)\rangle + \langle (J_t^*(X))', Y\rangle \\
&= -\langle J_t^*(X'), Y\rangle + \langle (J_t^*(X))', Y\rangle \\
&= \langle (J_t^*(X))' - J_t^*(X'), Y\rangle \\
&= \langle (J_t^*)'(X), Y\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, $(J_t^*)' = (J_t')^*$.

Observação 2.1.16 *Defina o operador $W_t = (J_t')^* \circ J_t - J_t^* \circ J_t'$. Então $W_t = 0$.*

Para todo campo paralelo Y, ao longo de γ, tem-se que

$$\begin{aligned}
W_t'(Y) &= ((J_t')^* \circ J_t - J_t^* \circ J_t')'(Y) \\
&= ((J_t)^*)' \circ J_t - J_t^* \circ J_t')'(Y) \\
&= (((J_t)^*)' \circ J_t - J_t^* \circ J_t')(Y))' - ((J_t)^*)' \circ J_t - J_t^* \circ J_t')(Y') \\
&= (((J_t)^*)' \circ J_t)(Y))' - (J_t^* \circ J_t')(Y))' \\
&= ((J_t)^*)''(J_t(Y)) + ((J_t)^*)'(J_t'(Y)) - (J_t^*)'(J_t'(Y)) - J_t^*(J_t''(Y)) \\
&= ((J_t)^*)''(J_t(Y)) - J_t^*(J_t''(Y)) \\
&= -(R_t \circ J_t)^*(J_t(Y)) + J_t^*(R_t \circ J_t(Y)) \\
&= -J_t^*(R_t^*(J_t(Y)) + J_t^*(R_t(J_t(Y))) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O que implica em

$$W_t(Y) = \lim_{t\to 0} W_t(Y) = \lim_{t\to 0}((J_t')^* \circ J_t - J_t^* \circ J_t')(Y) = 0.$$

Aplicando estas duas observações,

$$\begin{aligned}
U_t^* - U_t &= (J_t' \circ J_t^{-1})^* - (J_t' \circ J_t^{-1}) \\
&= (J_t^{-1})^* \circ (J_t')^* - (J_t' \circ J_t^{-1}) \\
&= (J_t^{-1})^*[(J_t')^* - J_t^*(J_t' \circ J_t^{-1})] \\
&= (J_t^{-1})^*[(J_t')^* J_t - J_t^* J_t']J_t^{-1} \\
&= (J_t^{-1})^*[W_t]J_t^{-1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, U_t é simétrica. ■

Proposição 2.1.17 *Sejam $\gamma : I \to M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, U uma solução simétrica da equação Riccati e J um campo de isomorfismos* *satisfazendo* $J' = J \circ U$. *Defina* $u : I \to M$ *por*

$$u := \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial t}(\ln(\det(J))).$$

Então

$$u = \frac{1}{n-1}tr(U)$$

e

$$u' \leq -u^2 - \frac{1}{n-1}Ric(\gamma', \gamma').$$

Prova. Por definição,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial t}(\ln(\det(J))) \\ &= \frac{1}{n-1}\frac{1}{\det(J))}det'|_J J' \\ &= \frac{1}{n-1}\frac{1}{\det(J))}det(J)tr(J^{-1}J') \\ &= \frac{1}{n-1}tr(U). \end{aligned}$$

Como U é solução da equação de Riccati,

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{n-1}(tr(U))' \\ &= \frac{1}{n-1}tr(U') \\ &= \frac{1}{n-1}tr(-(U^2 + R_t)) \\ &= -\frac{1}{n-1}tr(U^2) - \frac{1}{n-1}tr(R_t) \\ &\leq -\frac{1}{n-1}tr(U)^2 - \frac{1}{n-1}Ric(\gamma', \gamma') \\ &\leq -u^2 - \frac{1}{n-1}Ric(\gamma', \gamma'). \end{aligned}$$

■

Como mencionado anteriormente, o principal resultado desta seção é a relação entre o crescimento do volume e a curvatura de Ricci, conforme segue:

Lema 2.1.18 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $\gamma : [0, t_0(v)]$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, com $\gamma(0) = o$ e sendo $v = \gamma'(0)$. Considere $J_2(t), \ldots, J_n(t)$ campos de jacobi ao longo de γ, com $J_i(0) = 0$ e $J_i'(0) = E_i$, onde $\{E_2, \ldots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $(\gamma_v'(0))^\perp$ e defina*

$$J_v(t) = \mathrm{vol}(t)(J_2 \wedge \ldots \wedge J_n).$$

Se a curvatura de Ricci de M é limitada inferiormente por $2K(t)$, $K : [0, t_0(v)] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então,

$$ln\left(\frac{J_v(t)^{\frac{1}{n-1}}}{\phi}\right) \leq -\int_0^r \left(\frac{1}{\phi(t)}\int_0^t (\phi''(s) - \phi(s)K(s))ds\right)dt,$$

onde $\phi : [0, t_0(v)) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo $\phi(0)$, $\phi'(0) = 1$ e $\phi(r) > 0$, para $r \in (0, t_0(v))$.

Prova. Considere $\{E_i(t)\}_{i=2,\ldots n}$ um referencial ortonormal de $(\gamma\prime(t))^\perp$, formada pelo transporte paralelo de E_i ao longo de γ. Defina J_t conforme o Teorema 2.1.14, logo

$$U_t := J_t' \circ J_t^{-1}$$

é uma solução simétrica da equação de Riccati. Deste modo, pela Proposição 2.1.17 temos que

$$u := \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial t}(\ln(\det(J_t))).$$

satisfaz

$$u' \leq -u^2 - \mathrm{Ric}(\gamma').$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1.9, temos que

$$\det(J_t) = \det(\langle J_i(t), J_j(t)\rangle) = (\mathrm{vol}(J_2 \wedge \ldots \wedge J_n))^2 = (J_v(t))^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial t}(\ln((J_v(t))^2)) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial t}(\ln((J_v(t)^{\frac{1}{n-1}}))). \end{aligned}$$

Defina $w = u/2$, sendo assim,

$$\begin{aligned} w' + w^2 + K &\leq \frac{u'}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Ric}(\gamma') \\ &\leq \frac{1}{2}\left(u' + u^2 + \operatorname{Ric}(\gamma')\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$w' + w^2 + K \leq 0.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $\phi(t)^2$ e integrando de 0 para r, temos que

$$\int_0^r (\phi(t)^2 w'(t) + \phi(t)^2 w(t)^2 + \phi(t)^2 K(t))dt \leq 0. \tag{2.4}$$

Segue do Capítulo 1 e 2, da bibliografia [10], que $\frac{\partial}{\partial t}J_v(t)^{\frac{1}{n-1}}|_{(0)} = 1$. Portanto,

$$\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{J_v(r)^{\frac{1}{n-1}}}{\phi(r)} = \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{(J_v(r)^{\frac{1}{n-1}})'}{\phi'(r)} = \frac{1}{1} = 1. \tag{2.5}$$

Por consequência,

$$\lim_{r\longrightarrow 0}\phi(r)^2 w(r) = \lim_{r\longrightarrow 0}\phi(r)\left(\frac{\phi(r)}{J_v(t)^{\frac{1}{n-1}}}\right)(J_v(t)^{\frac{1}{n-1}})' = 0.$$

Desta maneira,

$$\phi(r)^2 w(r) - \phi(0)^2 w(0) = \int_0^r \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)^2 w(t))dt,$$

ou seja,

$$\int_0^r \phi(t)^2 w'(t)dt = \phi(r)^2 w(r) - \int_0^r 2\phi(t)\phi'(t)w(t)dt. \tag{2.6}$$

Aplicando (2.6) em (2.4),

$$\phi(r)^2 w(r) + \int_0^s (-2\phi(t)\phi' w(t) + \phi(t)^2 w(t)^2 + \phi(t)^2 K(t))dt \leq 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\phi(r)^2 w(r) &\leq -\int_0^r (-2\phi(t)\phi'(t)w(t) + \phi(t)^2 w(t)^2 + \phi(t)^2 K(t))dt \\
&\leq -\int_0^r (-2\phi(t)\phi'(t)w(t) + \phi(t)^2 w(t)^2 + \phi'(t)^2 - \phi'(t)^2 + \phi(t)^2 K(t))dt \\
&\leq -\int_0^r (\phi(t)w(t) - \phi'(t))^2 dt + \int_0^r (\phi'(t)^2 - \phi(t)^2 K(t))dt \\
&\leq \int_0^r (\phi'(t)^2 - \phi(t)^2 K(t))dt.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\phi(r)\phi'(r) &= \int_0^r \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)\phi'(t))dt \\
&= \int_0^r \phi'(t)^2 dt + \int_0^r \phi(t)\phi''(t)dt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^r \phi'(t)^2 dt = \phi(r)\phi'(r) - \int_0^r \phi(t)\phi''(t)dt,$$

e assim,

$$\phi(r)^2 w(r) \leq \phi(r)\phi'(r) + \int_0^r (-\phi(t)\phi'' - \phi^2(t)K(t))dt.$$

Então

$$w(r) \leq \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} - \frac{1}{\phi(r)} \int_0^r (\phi''(t) + \phi(t)K(t))dt.$$

Por outro lado, visto em (2.5) que $(J_v^{\frac{1}{n-1}}/\phi)(0) = 1$, segue que

$$ln \left(\frac{J_v^{\frac{1}{n-1}}}{\phi} \right) (0) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{J_v^{\frac{1}{n-1}}}{\varphi} \right) (r) &= \int_0^r \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \left(\frac{J_v^{\frac{1}{n-1}}(t)}{\phi(t)} \right) \right) dt \\
&= \int_0^r \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \left(J_v^{\frac{1}{n-1}}(t) \right) - \ln \left(\phi(t) \right) \right) dt \\
&\leq \int_0^r \left(\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} - \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t (\phi''(s) - \phi(s)K(s))ds - \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \right) dt \\
&\leq - \int_0^r \left(\frac{1}{\phi(t)} \int_0^t (\phi''(s) - \phi(s)K(s))ds \right) dt.
\end{aligned}$$

O que conclui a prova do lema. ■

Teorema 2.1.19 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $K : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existe $o \in M$ tal que*

$$Ric_x(v) \geq 2K(d(x, o)),$$

$\forall x \in M$, $\forall v \in T_xM$, então o volume da bola geodésica $B_R(o)$ satisfaz

$$Vol(B_R(o)) \leq w_{n-1} \int_0^R \phi(t)^{n-1} dt,$$

onde w_{n-1} *é o volume da* $(n-1)-$*esfera em* T_oM *e* $\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é a solução de*

$$\phi''(t) + K(t)\phi(t) = 0$$
$$\phi(0) = 0, \ \phi'(0) = 1.$$

Prova. Pelo Teorema 2.1.11, segue que

$$\mathrm{Vol}(B_R(o)) = \int_{\mathbb{S}_o^{n-1}} \int_0^{\min\{R, t_0(v)\}} J_v(t) dt dv.$$

Por outro lado, utilizando o Lema 2.1.18,

$$\begin{aligned} ln \left(\frac{J_v^{\frac{1}{n-1}}}{\phi} \right) &\leq - \int_0^r \frac{1}{\phi^2(t)} \int_0^s (\phi''(t) + K(t)\phi(t)) ds dt \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\frac{J_v^{\frac{1}{n-1}}}{\phi} \leq 1$$

e consequentemente $J_v \leq \phi^{n-1}$.

Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B_R(o)) &= \int_{\mathbb{S}_o^{n-1}} \int_0^{\min\{R, t_0(v)\}} J_v(t) dt dv \\ &\leq \int_{\mathbb{S}_o^{n-1}} \int_0^{\min\{R, t_0(v)\}} \phi(t)^{n-1} dt dv \\ &\leq w_{n-1} \int_0^R \phi(t)^{n-1} dt \end{aligned}$$

■

2.1.2 Submersão Riemanniana

O objetivo principal desta seção é definir submersão Riemanniana e seus tensores fundamentais, para posterior aplicação dos teoremas do capítulo 3. Como principal bibliografia destes assuntos [9].

Sejam (M^{n+k}, g) e (B^n, g') variedades Riemannianas. Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow B$ é dita submersão, se ϕ é sobrejetiva, e para todo $p \in M$, $d\phi_p : T_pM^{n+k} \longrightarrow T_{\phi(p)}B^n$ tem posto n.

O Teorema da Função Implícita garante que, para todo $q \in B$, a fibra $\phi^{-1}(q) = \phi_q$ é uma subvariedade de M de dimensão k. Um vetor tangente a alguma fibra ϕ_q, $q \in B$, é chamado de *vetor vertical* da submersão. Além disto, a submersão ϕ diz-se *Riemanniana* se, para todo $p \in M$, $d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}B$, preserva comprimento de vetores ortogonais a $\phi_{\phi(p)}$.

Um vetor $x \in T_pM$ é dito *horizontal* se ele é ortogonal a fibra. Sendo assim, o espaço T_pM admite a decomposição $T_pM = (T_pM)^h \oplus (T_pM)^v$ onde $(T_pM)^h$ e $(T_pM)^v$ indicam os subespaços dos vetores horizontais e verticais, respectivamente. Seja $X \in \mathcal{X}(B)$, o levantamento horizontal $\overline{X}$ de X, em $p \in M$, é o campo horizontal definido por $d\phi_p(\overline{X}(p)) = X(\phi(p))$.

Proposição 2.1.20 *Seja $\phi : (M, g) :\longrightarrow (B, g')$ uma submersão Riemanniana, e denote por ∇ e ∇' a conexão Levi-Civita de M e B, respectivamente. Se $\overline{X}, \overline{Y}$ são os levantamentos horizontais de X e Y, tem-se:*

a) $g(\overline{X}, \overline{Y}) = g'(X, Y) \circ \phi$;

b) $[\overline{X}, \overline{Y}]^h$ é o levantamento horizontal de $[X, Y]$;

c) $(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^h$ é o levantamento horizontal de $\nabla'_X Y$;

d) para qualquer vetor vertical V, $[\overline{X}, V]$ é vertical.

Prova. O item (a) decorre da definição de submersão Riemanniana. Para mostrar (b), observe que

$$
\begin{aligned}
d\phi([\overline{X}, \overline{Y}]) &= d\phi(\overline{XY} - \overline{YX}) \\
&= d\phi(\overline{X})d\phi(\overline{Y}) - d\phi(\overline{Y})d\phi(\overline{X}) \\
&= XY - YX \\
&= [X, Y],
\end{aligned}
$$

logo, $[\overline{X},\overline{Y}]^h$ é o levantamento horizontal de $[X,Y]$.

Já o caso (c), para todo $Z \in \mathcal{X}(Z)$, sendo $\overline{Z}$ o levantamento de Z, tem-se

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}) &= \overline{X}g(\overline{Y},\overline{Z}) + \overline{Y}g(\overline{Z},\overline{X}) - \overline{Z}g(\overline{X},\overline{Y}) \\ &+ g([\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}) + g([\overline{Z},\overline{X}],\overline{Y}) - g([\overline{Y},\overline{Z}],\overline{X}). \end{aligned}$$

Logo, aplicando os itens (a) e (b), segue

$$\begin{aligned} 2g'(d\phi(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}),Z)) &= 2g(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}) \\ &= \overline{X}g(\overline{Y},\overline{Z}) + \overline{Y}g(\overline{Z},\overline{X}) - \overline{Z}g(\overline{X},\overline{Y}) \\ &+ dg([\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}) + g([\overline{Z},\overline{X}],\overline{Y}) - g([\overline{Y},\overline{Z}],\overline{X})) \\ &= Xg(Y,Z) + Yg(eZ,X) - Zg(X,Y)) \\ &+ g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) \\ &= 2g'((\nabla'_X Y),Z)). \end{aligned}$$

Como a igualdade é verdadeira para qualquer Z, segue que $[\overline{X},\overline{Y}]^h$ é o levantamento horizontal de $[X,Y]$.

Por fim, repare que

$$d\phi([X,V]) = [d\phi(X),d\phi(V)]' = [d\phi(X),0]' = 0,$$

onde $[,]'$ é o colchete de B, então $[\overline{X},V]$ é vertical. ■

Por convenção, denote $\mathcal{X}^h(M)$ e $\mathcal{X}^v(M)$ para os espaços de campos horizontais e verticais, respectivamente, e defina as distribuições

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : M &\longrightarrow \mathcal{X}^v(M) \\ p &\longmapsto (T_pM)^v. \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{H} : M \longrightarrow \mathcal{X}^h(M)$$
$$p \longmapsto (T_pM)^h.$$

Observação 2.1.21 *Sob as hipóteses acima, a distribuição $\mathcal{V}$ é integrável.*

De fato, dado $p \in M$, segue que a fibra $\phi_{\phi(p)}$ é uma subvariedade de M. Além disso, $p \in \phi_{\phi(p)}$ e

$$\mathcal{V}(i(p)) = di_p(T_p(\phi_{\phi(p)})),$$

onde $i : \phi_{\phi(p)} \longrightarrow M$ é a inclusão. Logo, a distribuição $\mathcal{V}$ é integrável.

2.1.2.1 Tensores Fundamentais

Seja $\phi : (M, g) :\longrightarrow (B, g')$ uma submersão Riemanniana. Defina os tensores T e A, por meio das projeções vertical e horizontal $v : \mathcal{X}(M) :\longrightarrow \mathcal{X}^v(M)$, $h : \mathcal{X}(M) :\longrightarrow \mathcal{X}^h(M)$, de acordo com as fórmulas:

$$T(E, F) = T_E F = (\nabla_{E^v} F^v)^h + (\nabla_{E^v} F^h)^v$$

e

$$A(E, F) = A_E F = (\nabla_{E^h} F^v)^h + (\nabla_{E^h} F^h)^v,$$

para qualquer $E, F \in \mathcal{X}(M)$, onde ∇ denota a conexão Riemanniana de M.

Note que T e A são, respectivamente, campos de tensores verticais e horizontais, ou seja,

$$T_E F = \nabla_{E^v} F,\ A_E F = \nabla_{E^h} F,\ E, F \in \mathcal{X}(M).$$

Seja $p \in M$, visto que para qualquer $u, v \in T_pM$, $T_EF(p)$ e $A_EF(p)$ não dependem das escolhas dos campos vetoriais E e F em M, tais que $E(p) = u$ e $F(p) = v$. Deste modo faz sentido considerar os operadores lineares T_u, A_u, em T_pM definido, por:

$$T_u v := T_E F \quad e \quad A_u v := A_E F,$$

onde $E, F \in \mathcal{X}(M)$ e $E(p) = u$, $F(p) = v$.

Proposição 2.1.22 *Sejam $p \in M$ e $u \in T_pM$. Então T_u e A_u são operadores antissimétricos, em (T_pM, g_p), e convertem espaços horizontais em verticais e vice-versa.*

Prova. Seja $p \in M$, dados quaisquer $u, v, w \in T_pM$, $E, F, W \in \mathcal{X}(M)$, tais que $E(p) = u$, $F(p) = v$ e $W(p) = w$, temos que

$$\begin{aligned}
g(T_u v, w) &= g(T_E F, W) \\
&= g((\nabla_{E^v} F^v)^h + (\nabla_{E^v} F^h)^v, W) \\
&= g(\nabla_{E^v} F^v, W^h) + g(\nabla_{E^v} F^h, W^v) \\
&= E^v g(F^v, W^h) - g(F^v, \nabla_{E^v} W^h) + E^v g(F^h, W^v) - g(F^h, \nabla_{E^v} W^v) \\
&= -g(F, (\nabla_{E^v} W^h)^v) - g((F^h, \nabla_{E^v} W^v)^v) \\
&= -g(F, (\nabla_{E^v} W^h)^v + (\nabla_{E^v} W^v)^v) \\
&= -g(F, T_E W) \\
&= -g(v, T_u w).
\end{aligned}$$

O mesmo ocorre com o operador A_u.

Segue da definição que T_u e A_u convertem espaços horizontais em verticais, e vice-versa.

■

A proposição a seguir é uma ferramenta necessária para os demais cálculos resultados desta seção.

Proposição 2.1.23 *Os tensores T e A satisfazem:*

a) $T_E F = T_F E$, *onde* $E, F \in \mathcal{X}^v(M)$;

b) $A_E F = -A_F E = \frac{1}{2}[E, F]^v$, *com* $E, F \in \mathcal{X}^h(M)$.

Prova. Como visto anteriormente que a distribuição $\mathcal{V}$ é integrável, assim, pelo Teorema de Frobenius,

$$[E^v, F^v] \in \mathcal{X}^v(M),$$

logo

$$(\nabla_{E^v} F^v)^h = (\nabla_{F^v} E^v)^h.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T_E F &= (\nabla_{E^v} F^v)^h + (\nabla_{E^v} F^h)^v \\ &= (\nabla_{E^v} F^v)^h \\ &= (\nabla_{F^v} E^v)^h \\ &= (\nabla_{F^v} E^v)^h + (\nabla_{F^v} E^h)^v \\ &= T_F E. \end{aligned}$$

Para a segunda propriedade, item (b), dados quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathcal{X}^h(M)$ e $W \in \mathcal{X}^v(M)$, segue que

$$\begin{aligned} g(A_X X, W) &= g((\nabla_{X^h} X^h)^v + (\nabla_{X^h} X^v)^h, W) \\ &= g(\nabla_{X^h} X^h, W) \\ &= g(\nabla_X X, W) \\ &= Xg(X, W) - g(X, \nabla_X W) \\ &= -g(X, \nabla_X W). \end{aligned}$$

Como $[X, W]^h = 0$ e $g(X, \nabla_X W - \nabla_W X) = g(X, [X, W]^h) = 0$, temos, $g(X, \nabla_X W) = g(X, \nabla_W X)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} g(A_X X, W) &= -g(X, \nabla_X W) \\ &= -g(X, \nabla_W X). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Wg(X,X) &= g(X,\nabla_W X) + g(\nabla_W X, X) \\ &= 2g(X,\nabla_W X). \end{aligned}$$

Logo,

$$g(A_X X, W) = -\frac{1}{2} W g(X,X) = 0,$$

pois $g(X,X)$ é constante ao longo das fibras.

Portanto, $A_X X = 0$, consequentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= A_{X+Y}(X+Y) \\ &= A_X(X) + A_X(Y) + A_Y(X) + A_Y(Y) \\ &= A_X(Y) + A_Y(X), \end{aligned}$$

ou seja, $A_X(Y) = -A_Y(X)$.

Por fim,

$$\begin{aligned} [X,Y]^v &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^v \\ &= (\nabla_{X^h} Y^h)^v - (\nabla_{Y^h} X^h)^v \\ &= (\nabla_{X^h} Y^h)^v + (\nabla_{X^h} Y^v)^h - ((\nabla_{Y^h} X^h)^v + (\nabla_{Y^h} X^v)^h) \\ &= A_X(Y) - A_Y(X) \\ &= 2A_X(Y), \end{aligned}$$

pois $[X,Y]^h = 0$. ■

Observação 2.1.24 *(Significado geométrico dos invariantes)*

a) O tensor A, restrito à $\mathcal{X}^h(M) \times \mathcal{X}^h(M)$, é nulo se, e somente se, a distribuição horizontal $\mathcal{H}$ é integrável;

b) O tensor T restrita à $\mathcal{X}^v(M) \times \mathcal{X}^v(M)$ é a segunda forma fundamental das fibras.

De fato, no item (a), dado $p \in M$, pelo Teorema de Frobenius temos que a distribuição

$\mathcal{H}$ é integrável se, e somente se, para todo $E, F \in \mathcal{X}^h(M)$, tem-se $[E, F] \in \mathcal{X}^h(M)$. Utilizando a Proposição 2.3.3,

$$2A_E F = [E, F]^v = 0.$$

Para o item (b), dado $p \in M$, para todo $v \in (T_pM)^v$ e $\eta \in (T_pM)^h$, considerando $V \in \mathcal{X}^v(M)$ e $X \in \mathcal{X}^h(M)$, tais que $V(p) = v$ e $X(p) = \eta$, segue

$$\begin{aligned}
II_\eta(v) &= H_\eta \\
&= \langle B(v, v), \eta\rangle \\
&= \langle \nabla_V V - (\nabla_V V)^v, X\rangle \\
&= \langle (\nabla_V V)^h, X\rangle \\
&= \langle T_V V, X\rangle \\
&= \langle T_V V(p), \eta\rangle.
\end{aligned}$$

O campo tensor A é chamado de tensor de integrabilidade da submersão ϕ.

Em particular, se T restrito à $\mathcal{X}^v(M) \times X^v(M)$ é o vetor nulo, significa que qualquer fibra de ϕ é uma subvariedade totalmente geodésica de M. A afirmação inversa também é verdadeiro.

Observação 2.1.25 *As seguintes equações são consequências diretas da definição de T e A.*

$$\begin{aligned}
\nabla_U X &= T_U X + (\nabla_U X)^h; \\
\nabla_X U &= (\nabla_X U)^v + A_X U; \\
\nabla_X Y &= A_X Y + (\nabla_X Y)^h; \\
(\nabla_U X)^h &= (\nabla_X U)^h = A_X U
\end{aligned}$$

para qualquer $X, Y \in \mathcal{X}^h(M)$, $U \in \mathcal{X}^v(M)$.

Defina

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (E, F, G) &\mapsto g(A_E F, G), \end{aligned}$$

segue que a derivada covariante (tensorial) de $\mathcal{B}$ é dada por

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{B}(E, F, G, H) &= H\mathcal{B}(E, F, G) - \mathcal{B}(\nabla_H E, F, G) - \mathcal{B}(E, \nabla_H F, G) - \mathcal{B}(E, F, \nabla_H G) \\ &= Hg(A_E F, G) - g(A_{\nabla_H E} F, G) - g(A_E(\nabla_H F), G) - g(A_E F, \nabla_H G) \\ &= g(\nabla_H(A_E F), G) + g(A_E F, \nabla_E G) - g(A_{\nabla_H E} F, G) - g(A_E(\nabla_H F), G) \\ &- g(A_E F, \nabla_H G) \\ &= g(\nabla_H(A_E F), G) - g(A_{\nabla_H E} F, G) - g(A_E(\nabla_H F), G) \\ &= g(\nabla_H(A_E F) - A_{\nabla_H E} F - A_E(\nabla_H F), G). \end{aligned}$$

E de maneira análoga, defina

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (E, F, G) &\mapsto g(T_E F, G), \end{aligned}$$

por

$$\nabla\mathcal{C}(E, F, G, H) = g(\nabla_H(T_E F) - T_{\nabla_H E} F - T_E(\nabla_H F), G),$$

e considere:

$$\begin{aligned} (\nabla_E A)_F H &:= (\nabla_E A)(F, H) = \nabla_E(A_F H) - A_{\nabla_E F} H - A_F(\nabla_E F) \\ (\nabla_E T)_F H &:= (\nabla_E T)(F, H) = \nabla_E(T_F H) - T_{\nabla_E F} H - T_F(\nabla_E H). \end{aligned}$$

2.1.2.2 Curvaturas

Os campos tensoriais A, T e suas derivadas covariantes desempenham um papel fundamental papel na expressão das curvaturas de (M, g) e (B, g).

Para qualquer $E, F, G, H \in \mathcal{X}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned} R(E,F,G,H) &= g(R(E,F,G),H) \\ &= g(\nabla_F \nabla_E G - \nabla_E \nabla_F G + \nabla_{[E,F]} G, H) \end{aligned}$$

Por definição, R^* é o campo de tensores em $\mathcal{X}^h(M)$ com valores em $\mathcal{X}^h(M)$, que associa a qualquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}^h(M)$ e $p \in M$ o levantamento horizontal $R^*(X,Y,Z)$ de $R'_{\phi(p)}(d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p), d\phi_p(Z_p))$, sendo R' o tensor de curvatura Riemanniana de (B, g'). Ou seja:

$$d\phi_p(R^*(X,Y,Z))(p) = R'(d\phi_p(X), d\phi(Y), d\phi(Z)).$$

Para qualquer X, Y, Z, e H de campo de vetores horizontais, tem-se:

$$\begin{aligned} R^*(X,Y,Z,H) &= g(R^*(X,Y,Z),H) \\ &= g'(R^{'}(d\pi(X), d\pi(Y), d\pi(Z)), d\pi(H)) \\ &= R'(d\pi(X), d\pi(Y), d\pi(Z), d\pi(H)) \circ \pi. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.26 *Se X, Y, Z e H são campos de vetores horizontais e W e V campos de vetores verticais,então:*

a) $R(X,Y,Z,H) = R^*(X,Y,Z,H) - g((A_X Z), A_Y H) + g(A_Y Z, A_X H) + 2g(A_X Y, A_Z H)$;

b) $R(X,V,Y,W) = g((\nabla_X T)(V,W),Y) + g((\nabla_V A)(X,Y),W) - g(T_V X, T_W Y) + g(A_X V, A_Y W)$.

Prova. Por definição,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.7}$$

Para o último termo da igualdade acima, utilizando a Proposição 2.1.23, segue

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]}Z &= \nabla_{2A_XY}Z \\
&= (\nabla_{2A_XY}Z)^h + (\nabla_{2A_XY}Z)^v \\
&= 2(\nabla_{A_XY}Z)^h + 2T_{A_XY}Z.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $[A_XY, Z]^h = 0$, tem-se $(\nabla_{A_XY}Z)^h = (\nabla_Z A_XY)^h$, logo

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]}Z &= 2(\nabla_Z A_XY)^h + 2T_{A_XY}Z \\
&= 2A_Z A_XY + 2T_{A_XY}Z.
\end{aligned}$$

Já para a segunda e terceira parcela da equação 2.7, pela Proposição 2.1.20 tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla_Y Z &= (\nabla_Y Z)^h + (\nabla_Y Z)^v \\
&= \overline{\nabla'_{d\phi(Y)}df(Z)} + A_Y Z.
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y Z &= \nabla_X(\overline{\nabla'_{df(Y)}df(Z)} + A_Y Z + A_Y Z) \\
&= \nabla_X\overline{\nabla'_{df(Y)}df(Z)} + \nabla_X(A_Y Z) \\
&= (\nabla_X\overline{\nabla'_{df(Y)}df(Z)})^h + (\nabla_X\overline{\nabla'_{df(Y)}df(Z)})^v + (\nabla_X(A_Y Z))^h + (\nabla_X(A_Y Z))^v \\
&= \overline{\nabla'_{df(X)}\nabla'_{df(Y)}df(Z)} + \overline{\nabla'_{df(X)}(df(A_Y Z))} + A_X(A_Y Z) + (\nabla_X(A_Y Z))^v.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \overline{\nabla'_{df(Y)}\nabla'_{df(X)}df(Z)} + A_Y\overline{\nabla'_{df(X)}df(Z)} + A_Y(A_X Z) + (\nabla_Y(A_X Z))^v \\
&- \overline{\nabla'_{df(X)}\nabla'_{df(Y)}df(Z)} - A_X\overline{\nabla'_{df(Y)}df(Z)} - A_X(A_Y Z) - (\nabla_X(A_Y Z))^v \\
&+ 2A_Z A_XY + 2T_{A_XY}Z.
\end{aligned}$$

O que implica em

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)Z)^h &= \overline{\nabla'_{df(Y)}\nabla'_{df(X)}df(Z)} + A_Y(A_XZ) - \overline{\nabla'_{df(X)}\nabla'_{df(Y)}df(Z)} - A_X(A_YZ) \\
&+ 2A_ZA_XY.
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,H) &= g(R(X,Y)Z,H) \\
&= g((R(X,Y)Z)^h,H) \\
&= g(R^*(X,Y)Z + A_Y(A_XZ) - A_X(A_YZ) - 2A_ZA_XY, H) \\
&= g(R^*(X,Y)Z,H) + g(A_Y(A_XZ),H) - g(A_X(A_YZ),H) - 2g(A_ZA_XY,H).
\end{aligned}
$$

Por fim, como

$$
\begin{aligned}
g(A_Y(A_XZ),H) &= g(\nabla_Y(A_XZ),H) \\
&= -g(A_XZ,\nabla_YH) \\
&= -g(A_XZ,A_YH),
\end{aligned}
$$

segue que

$$
R(X,Y,Z,H) = R^*(X,Y,Z,H) - g((A_XZ),A_YH) + g(A_YZ,A_XH) + 2g(A_XY,A_ZH).
$$

Para o item (b), pela Proposição 2.1.23,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X T)(V,W),Y) &= g(\nabla_X(T_V W) - T_{\nabla_X V} W - T_V(\nabla_X W), Y) \\
&= g(\nabla_X(T_V W) - T_{(\nabla_X V)^v} W - T_V(\nabla_X W), Y) \\
&= g(\nabla_X(T_V W) - T_W(\nabla_X V)^v - T_V(\nabla_X W), Y) \\
&= g(\nabla_X(\nabla_V W)^h - \nabla_W(\nabla_X V)^v - \nabla_V(\nabla_X W)^v, Y) \\
&= Xg((\nabla_V W)^h, Y) - g((\nabla_V W)^h, \nabla_X Y) \\
&+ g((\nabla_X V)^v, \nabla_W Y) + g((\nabla_X W)^v, \nabla_V Y).
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_V A)(X,Y),W) &= Vg((\nabla_X Y)^v, W) - g((\nabla_X Y)^v, \nabla_V W) \\
&+ g((\nabla_V Y)^h, \nabla_X W) - g((\nabla_V X)^h, \nabla_Y W).
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de $[V,Y] = [V,Y]^v$, tem-se, $\nabla_V Y = \nabla_Y V$, logo

$$\begin{aligned}
&g((\nabla_X T)(V,W),Y) + g((\nabla_V A)(X,Y),W) - g(T_V X, T_W Y) + g(A_X V, A_Y W) = \\
&Xg((\nabla_V W)^h, Y) + Vg((\nabla_X Y)^v, W) - g(\nabla_V W, \nabla_X Y) + g(\nabla_V Y, \nabla_X W) \\
&+g([X,V]^v, \nabla_W Y).
\end{aligned}$$

Note que, pela Proposição 2.1.23,

$$\begin{aligned}
g([X,V]^v, \nabla_W Y) &= -g(\nabla_W [X,V]^v, Y) \\
&= -g(T_W [X,V]^v, Y) \\
&= -g(T_{[X,V]^v} W, Y) \\
&= -g(\nabla_{[X,V]^v} W, Y) \\
&= g(W, \nabla_{[X,V]^v} Y),
\end{aligned}$$

logo,

$$g((\nabla_X T)(V,W),Y) + g((\nabla_V A)(X,Y),W) - g(T_V X, T_W Y) + g(A_X V, A_Y W) =$$
$$Xg((\nabla_V W)^h, Y) + Vg((\nabla_X Y)^v, W) - g(\nabla_V W, \nabla_X Y) + g(\nabla_V Y, \nabla_X W)$$
$$g(W, \nabla_{[X,V]^v} Y).$$

Por outro lado, como $[V,Y] = [V,Y]^v$, segue que

$$\begin{aligned} R(X,V,Y,W) &= g(\nabla_V(\nabla_X Y),W) - g(\nabla_X(\nabla_V Y),W) + g(\nabla_{[X,V]}Y,W) \\ &= Vg(\nabla_X Y,W) - g(\nabla_X Y,\nabla_V W) - Xg(\nabla_V Y,W) \\ &+ g(\nabla_V Y,\nabla_X W) + g(\nabla_{[X,V]^v}Y,W) \\ &= Vg(\nabla_X Y,W) - g(\nabla_X Y,\nabla_V W) + Xg(Y,\nabla_V W) \\ &- g(\nabla_V Y,\nabla_X W) + g(\nabla_{[X,V]^v}Y,W). \end{aligned}$$

Portanto, pelas equações acima, vale (b). ■

Seja N um campo vetorial localmente definido por

$$N = \sum_{j=1}^{k} T_{U_j} U_i,$$

onde $\{U_j\}_{1\leq j\leq k}$, $U_j \subset \mathcal{X}^v(M)$, é um referencial ortonormal localmente de M. Observe que $N = rH$, onde H é o vetor curvatura média das fibras.

Seguem algumas propriedades do campo N.

Lema 2.1.27 *Para qualquer $E \in \mathcal{X}(M)$ e $X \in \mathcal{X}^h(M)$, tem-se:*

$$g(\nabla_E N, X) = \sum_{j=1}^{k} g((\nabla_E T)(U_j,U_j),X),$$

onde $\{U_j\}_{1\leq j\leq k}$, $U_j \subset \mathcal{X}^v(M)$, é um referencial ortonormal localmente de M.

Prova. Por definição,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} g((\nabla_E T)(U_j,U_j),X) &= \sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E T_{U_j}U_j - T_{\nabla_E U_j}U_j - T_{U_j}\nabla_E U_j, X)\\
&= \sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E T_{U_j}U_j - (\nabla_{(\nabla_E U_j)^v}U_j)^h - (\nabla_{U_j}(\nabla_E U_j)^v)^h, X).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como o colchete de campos verticais é vertical,

$$[(\nabla_E U_j)^v, U_j]^h = 0,$$

logo

$$(\nabla_{(\nabla_E U_j)^v}U_j)^h = (\nabla_{U_j}(\nabla_E U_j)^v)^h.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
g(-(\nabla_{(\nabla_E U_j)^v}U_j)^h - (\nabla_{U_j}(\nabla_E U_j)^v)^h, X) &= -2g(\nabla_{U_j}(\nabla_E U_j)^v, X)\\
&= 2g((\nabla_E U_j)^v, \nabla_{U_j}X)\\
&= 2g(\nabla_E U_j, T_{U_j}X),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} g((\nabla_E T)(U_j,U_j),X) &= \sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E T_{U_j}U_j - T_{\nabla_E U_j}U_j - T_{U_j}\nabla_E U_j, X)\\
&= \sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E T_{U_j}U_j, X) + \sum_{j=1}^{k} 2g(\nabla_E U_j, T_{U_j}X)\\
&= g(\nabla_E N, X) + 2\sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E U_j, T_{U_j}X).
\end{aligned}$$

Desta maneira, basta mostrar que

$$2\sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E U_j, T_{U_j}X) = 0.$$

Escrevendo

$$T_{U_j}X = \sum_{l}^{k} g(T_{U_j}X, U_l)U_l,$$

tem-se

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E U_j, T_{U_j}X) &= 2\sum_{j=1}^{k} g(\nabla_E U_j, \sum_{l}^{k} g(T_{U_j}X, U_l)U_l) \\ &= 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{l}^{k} g(T_{U_j}X, U_l)g((\nabla_E U_j), U_l) \\ &= -2\sum_{j=1}^{k}\sum_{l}^{k} g(X, T_{U_j}U_l)g((\nabla_E U_j), U_l) \\ &= = 0. \end{aligned}$$

■

Com os resultados anteriores, é possível escrever uma relação entre os tensor de Rici de M e de B.

Proposição 2.1.28 *Sejam ρ o tensor de Ricci de M, ρ' o tensor de Ricci de B. Com respeito a submersão ϕ, seja $\{X_i, U_j\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k}$ um referencial ortonormal local em M, com $X_i \in \mathcal{X}^h(M)$ e $U_j \in \mathcal{X}^v(M)$. Então para qualquer $X, Y \in \mathcal{X}^h(M)$, $X' = d\phi(X)$ e $Y' = d\phi(Y)$, é satisfeita a seguinte relação*

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \rho'(X',Y')\circ\phi + \frac{1}{2}\{g(\nabla_X N, Y) + g(\nabla_Y N, X)\} - 2\sum_{i} g(A_X X_i, A_Y X_i) \\ &- \sum_{j} g(T_{U_j}X, T_{U_j}, Y)\}. \end{aligned}$$

Prova. Por definição,

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, X_i, Y, X_i) + \sum_{j=1}^{k} R(X, U_j, Y, U_j).$$

Aplicando a Proposição 2.1.26 e o Lema 2.1.23,

$$\begin{aligned}
R(X, X_i, Y, X_i) &= R(X, X_i, Y, X_i) - 2g(A_X X_i, A_Y X_i) + g(A_{X_i} Y, A_X X_i) \\
&- g(A_X Y, A_{X_i} X_i) \\
&= \tilde{R}(d\phi(X), d\phi(X_i), d\phi(Y), d\phi(X_i)) - 3g(A_X X_i, A_Y X_i)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R(X, U_j, Y, U_j) &= g((\nabla_X T)(U_i, U_i), Y) + g((\nabla_{U_j} A)(X, Y), U_j) - g(T_{U_j} X, T_{U_j} Y) \\
&+ g(A_Y U_j, A_X U_j) \\
&= g(\nabla_X N, Y) + g((\nabla_{U_j} A)(X, Y), U_j) - g(T_{U_j} X, T_{U_j} Y) \\
&+ g(A_Y U_j, A_X U_j).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
g((\nabla_U A)_X Y, V) + g((\nabla_V A)_X Y, U) &= g(\nabla_U((\nabla_{X^h} Y^h)^v + (\nabla_{X^h} Y^v)^h), V) \\
&- g((\nabla_{(\nabla_U X)^h} Y^h)^v + (\nabla_{(\nabla_U X)^h} Y^v)^h, V) \\
&- g((\nabla_{X^h} (\nabla_U Y)^h)^v + (\nabla_{X^h} (\nabla_U Y)^v)^h, V) \\
&+ g(\nabla_V((\nabla_{X^h} Y^h)^v + (\nabla_{X^h} Y^v)^h), U) \\
&- g((\nabla_{(\nabla_V X)^h} Y^h)^v + (\nabla_{(\nabla_V X)^h} Y^v)^h, U) \\
&- g((\nabla_{X^h} (\nabla_V Y)^h)^v + (\nabla_{X^h} (\nabla_V Y)^v)^h, U) \\
&= g(\nabla_Y(\nabla_{U^v} V^v)^h + (\nabla_{U^v} V^h)^v), X) \\
&- (\nabla_{(\nabla_Y U))^v} V^v)^h - (\nabla_{(\nabla_Y U)^v} V^h)^v, X) \\
&- (\nabla_{U^v} (\nabla_Y V))^v)^h + (\nabla_{U^v} (\nabla_Y V)^h)^v \\
&+ g(\nabla_X((\nabla_{U^v} V^v)^h + (\nabla_{U^v} V^h)^v), Y) \\
&- g((\nabla_{(\nabla_X U))^v} V^v)^h + (\nabla_{(\nabla_X U)^v} V^h)^v), Y) \\
&- g((\nabla_{U^v} (\nabla_X V)^v)^h + (\nabla_{U^v} (\nabla_X V)^h)^v \\
&= g(\nabla_Y T_U V - T_{\nabla_Y U} V - T_U \nabla_Y V, X) + g(\nabla_X T_U V \\
&- T_{\nabla_X U} V - T_U \nabla_X V, Y) \\
&= g((\nabla_Y T)_U V, X) + g((\nabla_X T)_U V, Y),
\end{aligned}
$$

logo

$$g((\nabla_{U_j} A)_X Y, U_j) + g((\nabla_{U_j} A)_X Y, U_j) \;=\; g((\nabla_Y T)_{U_j} U_j, X) - g((\nabla_X T)_{U_j} U_j, Y).$$

Aplicando o Lema 2.1.27,

$$g((\nabla_{U_j} A)_X Y, U_j) \;=\; \frac{1}{2}(g(\nabla_Y N, X) - g(\nabla_X N, Y)).$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\sum_j g(A_Y U_j, A_X U_j) &= \sum_j g(\sum_i g(A_Y U_j, X_i)X_i, \sum_k g(A_X U_j, X_k)X_k) \\
&= \sum_i \sum_j g(A_Y U_j, X_i) g(A_X U_j, X_i) \\
&= \sum_i \sum_j g(U_j, A_Y X_i) g(U_j, A_X X_i) \\
&= \sum_i (g(\sum_j g(A_Y X_i U_j)U_j, \sum_k g(A_X X_i, U_j)U_k)) \\
&= \sum_i g(A_X X_i, A_Y X_i).
\end{aligned}$$

Com base nos resultados acima,

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \rho'(X',Y') \circ \pi + \frac{1}{2}\{g(\nabla_X N, Y) + g(\nabla_Y N, X)\} - 2\sum_i^n g(A_X X_i, A_Y X_i) \\
&- \sum_j^k g(T_{U_j} X, T_{U_j}, Y)\}.
\end{aligned}$$

■

2.2 Variedades Riemannianas $p-$parabólicas

Na literatura, a definição de variedade Riemanniana $p-$parabólica é apresentada com relação a diferentes conceitos. No entanto, este trabalho não se detêm em estudar esta equivalência de relações e para maiores detalhes é indica a referência bibliográfica [1].

Seja M uma variedade Riemanniana completa, o operador $p-$Laplaciano Δ_p em M é definido por

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^{2-p}}\right), \; u \in C^2(M).$$

No caso $p = 2$, é o operador Laplaciano usual. Denote por $\phi \in C_0^\infty(M)$ o conjunto das funções de classe $C^\infty(M)$ com suporte compacto. Uma função $u \in C^1(M)$ é solução fraca de $\Delta_p(u)$, se

$$\int_M \left\langle \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^{2-p}}, \nabla\varphi \right\rangle dx = 0, \tag{2.8}$$

para todo $\varphi \in C^{0,\infty}(M)$. De maneira análoga, $v \in C^1(M)$ é uma supersolução (subsolução) no sentido fraco, se (2.8) ocorre com "$\geq$"("$\leq$") ao invés de "$=$", para todo $\varphi \in C^{0,\infty}(M)$.

Uma variedade Riemanniana completa M é dita p-parabólica, $p > 1$, se qualquer supersolução fraca limitada inferiormente é constante.

Uma condição suficiente para uma variedade M ser $p-$parabólica é o critério de Holopainen, o qual compara $p-$parabolicidade com o crescimento do volume de bolas geodésicas. Tal critério é enunciado a seguir:

Teorema 2.2.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Fixado $q \in M$, consideramos $V(r)$ o volume da bola geodésica centrada em q e de raio r. Dado $1 < p < \infty$, se*

$$\int^{\infty} \left(\frac{r}{V(r)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dr = \infty$$

ou

$$\int^{\infty} \left(\frac{1}{V'(r)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dr = \infty,$$

então (M, g) é $p-$parabólica.

Prova. Ver [7]. ∎

A condição acima é uma ferramenta crucial para obter os principais resultados deste trabalho.

2.3 Resultados de Análise Real

Os próximos resultados são decorrentes de Análise Real, e foram adaptados de resultados já existentes em [6] e [8].

Lema 2.3.1 *Sejam $f, g \in C^2([R, \infty))$, $R \geq 0$, tal que*

$$\frac{g''}{g} = \frac{f''}{f}.$$

Se existe $R_0 > R$ tal que $f(R_0) > 0$ e $f'(R_0) > 0$, então existe $\beta > 0$, tal que

$$g(R_0) < \beta f(R_0) \text{ e } g'(R_0) < \beta f'(R_0).$$

Prova. Note que

$$\begin{aligned}(g'f - gf')' &= g''f + g'f' - (g'f' + gf'') \\ &= g''f - gf'' \\ &= gf(\frac{g''}{g} - \frac{f''}{f}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, $g'f - gf'$ é constante.

Dividindo em dois casos, se $g'f - gf' \leq 0$, tomamos $\beta > 0$ tal que $g(R_0) < \beta f(R_0)$, segue que

$$g'(R_0)f(R_0) \leq g(R_0)f'(R_0) < \beta f(R_0)f'(R_0),$$

implicando em $g'(R_0) < \beta f'(R_0)$.

Já para o caso de $g'f - gf' \geq 0$, tomamos $\beta > 0$ tal que $g'(R_0) < \beta f'(R_0)$, segue que

$$g(R_0)f'(R_0) \leq g'(R_0)f(R_0) < \beta f'(R_0)f(R_0),$$

ou seja, $g(R_0) < \beta f(R_0)$, o que conclui a demonstração. ∎

Lema 2.3.2 *Sejam $f, g \in C^2([R, \infty))$, $R \geq 0$, tal que*

$$\frac{g''}{g} = \frac{f''}{f}.$$

Se existe $R_0 > R$ tal que $f(R_0) > g(R_0)$ e $f'(R_0) > g'(R_0)$, então $f(r) > g(r)$ para $r > R_0$.

Prova. Supondo por contradição que exista $s > R_0$ tal que $f(s) \leq g(s)$. Além disso, supondo r_0 o menor valor tal que $f(r_0) = g(r_0)$, temos que $f(r) > g(r)$, para $r < r_0$.

Desta maneira, para $r < r_0$,

$$\begin{aligned} f''(r) &= \frac{f''(r)}{f(r)} f(r) \\ &= \frac{g''(r)}{g(r)} f(r) \\ &\geq \frac{g''(r)}{g(r)} g(r) \\ &= g''(r). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{R_0}^{r} f''(t)dt \geq \int_{R_0}^{r} g''(t)dt,$$

e consequentemente,

$$f'(r) - f'(R_0) \geq g'(r) - g'(R_0),$$

ou seja, $f'(r) \geq g'(r)$.

Integrando novamente de R_0 até r_0, temos

$$\int_{R_0}^{r_0} f'(t)dt \geq \int_{R_0}^{r_0} g'(t)dt,$$

$$f(r_0) - f(R_0) \geq g(r_0) - g(R_0),$$

implicando em $f(r_0) > g(r_0)$. O que gera uma contradição.

Logo, para todo $r > R_0$, $f(r) > g(r)$. ■

Proposição 2.3.3 *Sejam $f, g \in C^2([0, \infty))$. Se existe $R \geq 0$, tal que $f(R) > 0$ e $f'(R) > 0$ e*

$$\frac{g''}{g}(r) = \frac{f''}{f}(r),$$

para $r > R$, então existe $\beta > 0$ tal que $g(r) \leq \beta f(r)$, para $r > R$.

Prova. Aplicando o Lema 2.3.1, existe $\beta > 0$ tal que

$$g(R) < \beta f(R) \; e \; g'(R) < \beta f'(R).$$

Defina $v(r) := \beta f(r)$, para $r > R$, logo

$$\frac{v''}{v}(r) = \frac{\beta f''}{\beta f}(r) = \frac{g''}{g}(r), \quad g(R) < \beta f(R) = v(R) \; e \; g'(R) < \beta f'(R) = v'(R).$$

Portanto, pelo Lema 2.3.2, $g(r) \leq v(r) = \beta f(r)$, para $r > R$. ■

Capítulo 3

Resultados Principais

Neste capítulo serão apresentadas as demonstrações dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2.

3.1 Prova do Teorema 1.0.1

Para dado α, tome $\delta > 0$, tal que $\delta < \frac{\alpha}{2}$, e defina

$$K_\delta(r) = -\delta \operatorname{csch}^2(r)(-1 + \delta \operatorname{sech}^2(r) - \tanh^2(r)).$$

Observe que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{K_\delta(r)}{\alpha \operatorname{sech}^2(r)} = \frac{2\delta}{\alpha} < 1.$$

Então, existe $r_\delta > R$, tal que para $r > r_\delta$ temos $K_\delta(r) \leq \alpha \operatorname{sech}^2(r)$, e consequentemente, $\mathrm{Ric}_x(v) \geq K_\delta(r(x))$, para $x \in M - B_o(r_\delta)$.

Seja

$$B = inf\{Ric_x(v); \forall x \in M - B_o(r_\delta), \forall v \in T_xM\},$$

e considere $\overline{K} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida por

$$\overline{K} = \begin{cases} B, \quad se \quad r < r_\delta \\ f(r), \quad se \quad r_\delta \leq r \leq r_\delta + 1 \\ K_\delta(r), \quad se \quad r_\delta + 1 \leq r \end{cases},$$

onde $f(r)$ é uma função contínua com $f(r) \leq K_\delta(r)$, para $r \in [r_\delta, r_\delta + 1]$.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de E.D.O. de segunda ordem, existe $\overline{\phi}(r)$ tal que

$$\overline{\phi}''(r) + \overline{K}\ \overline{\phi}(r) = 0$$
$$\overline{\phi}(0) = 0,\ \overline{\phi}'(0) = 1.$$

Aplicando o Teorema 2.1.19, onde $Vol(B_o(r))$ é o volume da bola geodésica, segue que

$$Vol(B_p(r)) \leq w_{n-1} \int_0^r (\overline{\phi}(t))^{n-1} dt.$$

Note que $\phi(r) = \tanh^\delta(r)$ é solução da equação

$$\phi''(r) + K_\delta \phi(r) = 0.$$

Observe que, para $r > r_\delta + 1$,

$$-\frac{\phi''(r)}{\phi(r)} = K_\delta(r) = \overline{K}(r) = -\frac{\overline{\phi}''(r)}{\overline{\phi}(r)},$$

e pela Proposição 2.3.3, existe $\beta^{\frac{1}{n-1}} > 0$ tal que $\overline{\phi}(r) \leq \beta^{\frac{1}{n-1}} \tanh^\delta(r)$, for $r > r_\delta + 1$.

Então, para $r > r_\delta + 1$,

$$\begin{aligned}
Vol(B_p(r)) &\leq w_{n-1} \int_0^r \overline{\phi}(t)^{n-1} dt \\
&\leq w_{n-1} \left(\int_0^{r_\delta+1} \overline{\phi}(t)^{n-1} dt + \int_{r_\delta+1}^r (\beta^{\frac{1}{n-1}} \tanh^\delta(r))^{n-1} dt \right) \\
&\leq w_{n-1} \left(\int_0^{r_\delta+1} (\overline{\phi}(t))^{n-1} dt + \int_{r_\delta+1}^r \beta dt \right) \\
&\leq w_{n-1} \left(\int_0^{r_\delta+1} (\overline{\phi}(t))^{n-1} dt + \beta(r - (r_\delta + 1)) \right) \\
&\leq Cr,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva.

Desta maneira,

$$\int^\infty \left(\frac{t}{Vol(B(t))} \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \geq \int^\infty \left(\frac{t}{Ct} \right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty,$$

para todo $p > 1$. Então, pelo Teorema 2.2.1, M é $p-$parabólica para todo $p > 1$.

3.2 Prova do Teorema 1.0.2

Considere

$$K(r) = h_\alpha(r) \frac{1}{r^2},$$

onde

$$h_\alpha(r) = \frac{\alpha(\alpha+1) r^\alpha}{r^\alpha - 1}.$$

Defina

$$B = inf\{Ric_x(v); \forall x \in M - B_o(R), \forall v \in T_x M\},$$

e $\overline{K} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função suave, definida por

$$\overline{K} = \begin{cases} B, & se \quad r < R \\ f(r), & se \quad R \leq r \leq R+1 \\ K(r), & se \quad R+1 \leq r \end{cases} ,$$

onde $f(r)$ é uma função suave com $f(r) \leq K(r)$, for $r \in [R, R+1]$.

Note que $\phi(r) = r^{\alpha+1} - r$ é solução de

$$\phi''(r) + K\phi(r) = 0.$$

Aplicando o Teorema 2.1.19 e a Proposição 2.3.3, existe $\beta^{\frac{1}{n-1}} > 0$, n a dimensão de M, tal que, para $r > R+1$,

$$\begin{aligned} Vol(B_o(r)) &\leq Vol(B_o(R+1)) + w_{n-1} \int_{R+1}^{r} \left(\beta^{\frac{1}{n-1}}(r^{\alpha+1} - 1)\right)^{n-1} dt \\ &\leq Vol(B_o(R+1)) + \beta w_{n-1} \int_{R+1}^{r} (r^{\alpha+1})^{n-1} dt \\ &\leq Cr^{(\alpha+1)(n-1)+1}, \end{aligned}$$

sendo C uma constante positiva.

Assim,

$$\int^{\infty} \left(\frac{t}{Vol(B_o(t))}\right)^{\frac{1}{p-1}} dt \geq \int^{\infty} \left(\frac{t}{Ct^{(\alpha+1)(n-1)+1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty,$$

se $p \geq (\alpha+1)(n-1)+1$.

Logo, pelo Teorema 2.2.1, M é $p-$parabólica para todo $p \geq (\alpha+1)(n-1)+1$.

Observação 3.2.1 *É importante observar que a função h_α, na hipótese de curvatura* Ricci *do Teorema 1.0.2, admite uma definição ainda mais geral, que será indicada por $h_{\alpha,\epsilon}$, com constantes positivas α e ε e $\alpha + 1 > \epsilon$, e o que também garante a validade do resultado, ou seja, se*

$$\mathrm{Ric}_x(v) \geq -\frac{h_{\alpha,\varepsilon}(d(x))}{d(x)^2}, \tag{3.1}$$

onde

$$h_{\alpha,\varepsilon}(d) = \frac{\alpha(\alpha+1)d^\alpha - \varepsilon(\varepsilon-1)d^\varepsilon}{d^\alpha - d^\varepsilon},$$

para todo $x \in M \backslash B_R(o)$, todo $v \in T_xM$, com $\|v\| = 1$ e para algum $R > 0$, onde $d(x)$ é a distância de x até o. Então M é $p-$parabólica, para qualquer $p \geq (\alpha+1)(n-1)+1$.

Capítulo 4

Variedades $p-$parabólicas e Submersões

Segue da Seção 2.1.2 uma relação entre curvatura de Ricci da variedade M e a curvatura de Ricci da variedade B. Sendo assim, é possível aplicar os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2 no contexto desta submersão.

Mais precisamente, seja M ser uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo do grupo de isometrias de M, agindo livremente e propriamente M. Nestas condições, é obtido um resultado que envolve o decaimento de curvatura de Ricci e o fato de M/G ser $p-$parabólica.

Além disso, neste capítulo é apresentado a demonstração do Teorema 1.0.4, juntamente com uma aplicação para a variedade $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, munido de um grupo a $1-$parâmetro de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

4.1 Prova Teorema 1.0.4

A prova deste teorema consiste em aplicar os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2. Para isto, são necessárias as ferramentas do Capítulo de Submersões Riemannianas.

Pela Proposição 2.1.28,

$$
\begin{aligned}
(n-1)\,\mathrm{Ric}(X) &= \rho(X,X)\\
&= \rho'(X',X')\circ\phi + \frac{r}{2}\{g(\nabla_X\vec{H},X) + g(\nabla_X N,X)\}\\
&- 2\sum_i g(A_X X_i, A_X X_i) - \sum_j g(T_{U_j}X, T_{U_j}, X)\\
&= (r-1)\,\mathrm{Ric}'(X') + \frac{r}{2}g(\nabla_X\vec{H},X) - 2\sum_i g(A_X X_i, A_X X_i)\\
&- \sum_j g(T_{U_j}X, T_{U_j}, X)\},
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(r-1)\,\mathrm{Ric}'(X') &= (n-1)\,\mathrm{Ric}(X) - \frac{r}{2}g(\nabla_X\vec{H},X) + 2\sum_i g(A_X X_i, A_X X_i)\\
&+ \sum_j g(T_{U_j}X, T_{U_j}, X).
\end{aligned}
$$

Desta maneira, no caso de (a), temos

$$
(r-1)\,\mathrm{Ric}'(X') = \alpha\,\mathrm{sech}^2(r).
$$

Pelo Teorema 1.0.1, segue que M/G é $p-$parabólica, e consequentemente M é $(G,p)-$parabólica, para todo $p>1$.

Para o caso (b), segue de forma análogo, aplicando o Teorema 1.0.2.

4.2 Aplicação para a variedade $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$

Considere $\mathbb{H}^2$ o plano hiperbólico de curvatura constante -1 e a variedade produto $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. Em ambos os casos tratam-se de variedades não $p-$parabólicas para todo $p>1$. Contudo, temos o seguinte fato.

Proposição 4.2.1 *Sejam $\mathbb{D}^2$ o modelo do disco de Poincaré de $\mathbb{H}^2$, $\lambda>0$ uma constante* *e* $G_\lambda = \{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *o subgrupo a* $1-$*parâmetro de isometrias de* $\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}$ *dado por*

$$\varphi_t(x,y,z) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} \cos(\lambda t) & \operatorname{sen}(\lambda t) \\ -\operatorname{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z+t \right), \ (x,y,z)\in\mathbb{D}^2\times\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R} \right\}.$$

Considere a métrica riemanniana no espaço quociente $(\mathbb{D}^2\times\mathbb{R})/G_\lambda$ *tal que a projeção quociente* $\pi:\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}\to(\mathbb{D}^2\times\mathbb{R})/G_\lambda$, *a saber*

$$\pi\left(x,y,z\right) = G_\lambda\left(x,y,z\right) = \left\{\varphi_t\left(x,y,z\right),\ t\in\mathbb{R}\right\},\ \ (x,y,z)\in\mathbb{D}^2\times\mathbb{R},$$

seja uma submersão riemanniana. Então $\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}$ *é* $(G_\lambda,p)-$*parabólica para todo* $p>1$ *e para todo* $\lambda>0$.

Prova. Observe que a métrica de $\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}$ é a métrica produto. Sendo assim, para todo $X,Y\in\mathcal{X}(\mathbb{D}^2\times\mathbb{R})$, conexão é dada pela relação

$$\nabla_X Y = \nabla^{\mathbb{D}^2}_{\pi_{\mathbb{D}^2(X)}}\pi_{\mathbb{D}^2}(Y) + \nabla^{\mathbb{R}}_{\pi_{\mathbb{R}(X)}}\pi_{\mathbb{R}}(Y)$$

onde $\pi_{\mathbb{D}^2}:\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{D}^2$ e $\pi_{\mathbb{R}}:\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são as projeções naturais.

Considere a parametrização

$$\begin{aligned} x:(0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} &\longrightarrow M \\ (t,\theta,z) &\longmapsto \left(\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\cos(\theta), \tanh\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}(\theta), z\right), \end{aligned}$$

com relação a qual temos os seguintes campos coordenados,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial x}{\partial r} = g'(t)(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),0), \\ X_2 &= \frac{\partial x}{\partial\theta} = g(t)(-\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta),0), \\ X_3 &= \frac{\partial x}{\partial z} = (0,0,1). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \operatorname{senh}^2(r), \quad g_{33} = 1 \; e \; \; g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0.$$

E as conexões não nulas, em relação dos campos coordenados, são

$$\nabla_{X_1} X_2 = \frac{\cosh(r)}{\operatorname{senh}(r)} X_2 \; e \; \; \nabla_{X_2} X_2 = -\operatorname{senh}(r)\cosh(r) X_1.$$

Dado $q = (g(r)\cos(\theta), g(r)\operatorname{sen}(\theta), z)$, a órbita que passam por q é dadas por

$$\begin{aligned}
\varphi_p(t) &= \left(\begin{bmatrix} \cos(\lambda t) & \operatorname{sen}(\lambda t) \\ -\operatorname{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g(r)\cos(\theta) \\ g(r)\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}, \quad z + t \right) \\
&= (\cos(\lambda t) g(r)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\lambda t) g(r)\operatorname{sen}(\theta), -\operatorname{sen}(\lambda t) g(r)\cos(\theta) \\
&+ \cos(\lambda t) g(r)\operatorname{sen}(\theta), z + t) \\
&= \cos(\lambda t) g(r)(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0) - \operatorname{sen}(\lambda t) g(r)(-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0) + (0, 0, z + t).
\end{aligned}$$

Deste modo, tomando o slice $M = \mathbb{D}^2 \times \{0\}$, em $t = 0$, o vetor tangente a órbita é dado por $V_q(t) = -\lambda X_2(r, \theta, 0) + X_3(r, \theta, 0)$, $q \in M$.

Portanto, $\left\{ E_1 = X_1, E_2 = \frac{1}{\operatorname{senh}(r)\sqrt{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1}} (X_2 + \lambda \operatorname{senh}^2(r) X_3), \frac{V_p}{|V_p|} = \frac{-\lambda X_2 + X_3}{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1} \right\}$ é uma base ortonormal para $T_q(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})$, com E_1 e E_2 sendo vetores horizontais, e $V_p/|V_p|$ um vetor vertical.

Como $(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})/G_\lambda$ é bi-dimensional, temos que

$$\operatorname{Ric}_{(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})/G_\lambda}(d\pi_q(E_1)) = \operatorname{Ric}_{(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})/G_\lambda}(d\pi_q(E_1)).$$

Conforme a construção feita na demonstração do Teorema 1.0.4, basta mostrar a relação (a) ou (b) apenas para um dos campos $\{E_1, E_2\}$. Para o caso E_1, são necessárias as seguintes expressões:

$$i) \; 2g(\nabla_{E_1} \vec{H}, E_1); \quad ii) \; \sum_i |A_{E_1} E_i|^2; \quad iii) \; \sum_j \left| T_{\frac{V_p}{|V_p|}} E_1 \right|^2.$$

Para (i), temos que

$$\begin{aligned}
2\vec{H}_G &= \nabla_{\frac{V_p}{|V_p|}} \frac{V_p}{|V_p|} \\
&= \left(\frac{1}{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1}\right) \left(\lambda^2 \nabla_{X_2} X_2 - \lambda \nabla_{X_3} X_2 - \lambda \nabla_{X_2} X_3 + \nabla_{X_3} X_3\right) \\
&= -\left(\frac{\lambda^2 \operatorname{senh}(r) \cosh(r)}{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1}\right) X_1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{E_1} \vec{H}_G, E_1) &= g\left(\nabla_{X_1}\left(-\frac{\lambda^2 \operatorname{senh}(r) \cosh(r)}{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1} X_1\right), X_1\right) \\
&= g\left(X_1\left(-\frac{\lambda^2 \operatorname{senh}(r) \cosh(r)}{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1}\right) X_1, X_1\right) - \frac{\lambda^2 \operatorname{senh}(r) \cosh(r)}{\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1} g\left(\nabla_{X_1} X_1, X_1\right) \\
&= -\frac{\lambda^2(\lambda^2 \operatorname{senh}^4(r) + \cosh^2(r)(1 - \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r)) + \operatorname{senh}^2(r))}{(1 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r))^2}.
\end{aligned}$$

Na situação (ii), note que

$$\begin{aligned}
\sum_K ||A_{X_1} E_k||^2 &= \sum_K |(\nabla_{X_1} E_k)^v|^2 \\
&= |(\nabla_{X_1} E_2)^v|^2 \\
&= \left| g\left(\nabla_{X_1} E_2, \frac{V}{|V|}\right) \frac{V}{|V|} \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{|V|} g(\nabla_{X_1} E_2, V) \right|^2 \\
&= \frac{1}{|V|^2} \left| g(E_2, \nabla_{X_1} V) \right|^2.
\end{aligned}$$

E sendo

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}\left(-\lambda X_2 + X_3)\right) &= \nabla_{X_1}\left(V\right) \\
&= -\lambda \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} X_3 \\
&= -\lambda \frac{\cosh(r)}{\operatorname{senh}(r)} X_2,
\end{aligned}$$

segue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_K ||A_{X_1}E_k||^2 \\
= \;& \frac{1}{\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1}\left|g\left(\frac{1}{\operatorname{senh}(r)\sqrt{\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1}}(X_2+\lambda\operatorname{senh}^2(r)X_3), -\lambda\frac{\cosh(r)}{\operatorname{senh}(r)}X_2\right)\right|^2 \\
= \;& \frac{1}{\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1}\frac{1}{\operatorname{senh}^2(r)(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)}\lambda^2\frac{\cosh^2(r)}{\operatorname{senh}^2(r)})\operatorname{senh}^4(r) \\
= \;& \frac{\lambda^2\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2}
\end{aligned}
$$

Por fim, para (iii),

$$
\begin{aligned}
\left||T_{\frac{V}{|V|}}X_1\right|^2 &= \left|(\nabla_{\frac{V}{|V|}}X_1)^v\right|^2 \\
&= \left|g\left(\nabla_{\frac{V}{|V|}}X_1, \frac{V}{|V|}\right)\frac{V}{|V|}\right|^2 \\
&= \left|g\left(X_1, \nabla_{\frac{V}{|V|}}\frac{V}{|V|}\right)\right|^2 \\
&= \left|g\left(X_1, \vec{H}\right)\right|^2.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left|T_{\frac{V}{|V|}}X_1\right|^2 &= \left|g\left(X_1, -\left(\frac{\lambda^2\operatorname{senh}(r)\cosh(r)}{\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1}\right)X_1\right)\right|^2 \\
&= \frac{\lambda^4\operatorname{senh}^2(r)\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
2\sum_K |A_{X_1}E_k|^2 + \left|T_{\frac{V}{|V|}}X_1\right|^2 &= 2\frac{\lambda^2\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2} + \frac{\lambda^4\operatorname{senh}^2(r)\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2} \\
&= 2\frac{\lambda^2\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2} + \frac{\lambda^4\operatorname{senh}^2(r)\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2} \\
&= \frac{2\lambda^2\cosh^2(r)+\lambda^4\operatorname{senh}^2(r)\cosh^2(r)}{(\lambda^2\operatorname{senh}^2(r)+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$Ric(X_1) = \frac{1}{3-1}\left(K(X_1, X_2) + K(X_1, X_3)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& 2Ric(X_1) - \langle \nabla_{X_1} \vec{H}_G, X_1 \rangle + 2\sum_K ||A_{X_1}E_k||^2 + |T_{\frac{V}{|V|}} X_1|^2 \\
= \quad & -1 + \frac{\lambda^2(\lambda^2 \operatorname{senh}^4(r) + \cosh^2(r)(1 - \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r)) + \operatorname{senh}^2(r))}{(1 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r))^2} \\
& + \frac{2\lambda^2 \cosh^2(r) + \lambda^4 \operatorname{senh}^2(r)\cosh^2(r)}{(\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) + 1)^2} \\
= \quad & \frac{3\lambda^2 + 2\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) - 1}{(1 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r))^2}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{sech}^2(r)} \frac{3\lambda^2 + 2\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) - 1}{(1 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r))^2} = \frac{2}{\lambda^2},$$

o que implica em, tomando $\alpha = \frac{1}{\lambda^2}$,

$$\frac{3\lambda^2 + 2\lambda^2 \operatorname{senh}^2(r) - 1}{(1 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2(r))^2} \geq \alpha \operatorname{sech}^2(r)$$

para r suficientemente grande.

Logo, pelo Teorema 1.0.4, segue que $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ é $(G_\lambda, p)-$parabólica para todo $p > 1$. ■

Repare que, para o caso de $\lambda = 0$, $(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})/G_\lambda = \mathbb{D}^2$. Consequentemente $(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})/G_\lambda = \mathbb{D}^2$ é não $(G_\lambda, p)-$parabólica para todo $p > 1$ e $\lambda = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Aiolfi, L. Bonorino, J. Ripoll, M. Soret, M. Ville. Equivalences among parabolicity, comparison principle and capacity on complete Riemannian manifolds. https://arxiv.org/pdf/2109.07057.pdf

[2] W. Ballmann, Differential Geometry II, 2010. Avaiable at:`https://luis.impa.br/aulas/georiem/Ballman_DifferentialGeometryII.pdf`, access in 10/10/23.

[3] J. Casteras, E. Heinonen, I. Holopainen. Existence and non-existence of minimal graphic and p-harmonic functions. Proceedings, v. 150, n. 1, p. 341–366, 2019.

[4] S. Y. Cheng, Yau, S.-T. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 28, n. 3, p. 333–354, 1 maio 1975.

[5] M. Falcitelli, A. Pastore, S. Ianus. Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific Publishing Company, 2004.

[6] R. E. Greene , H. Wu. Lecture Notes in Mathematics.Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole, v. 699, 1979.

[7] I. Holopainen. Quasiregular mappings and the p-Laplace operator. Contemporary mathematics, p. 219–239, 2003.

[8] P. March.Brownian Motion and Harmonic Functions on Rotationally Symmetric Manifolds.The Annals of Probability, v. 14, pp. 793-801, 1986.

[9] B. O'Neill. The fundamental equations of a submersion. Mich. Math. J., 459-469, 1966.

[10] L. Pete. Geometric analysis. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2012.

[11] M. Rigoli, M. Salvatori, M. Vignati. A note onp-subharmonic functions on complete manifolds. Manuscripta Mathematica, v. 92, n. 1, p. 339–359, 1997.

[12] M. Rigoli, M. Salvatori, M. Vignati. Volume growth and p -subharmonic functions on complete manifolds. Mathematische Zeitschrift, v. 227, n. 3, p. 367–375, 1998.

[13] A.Vähäkangas. Dirichlet Problem at Infinity for A-Harmonic Functions. Potential Analysis, v. 27, n. 1, p. 27–44, 2007.

[14] S.-T. Yau. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.