

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA: PESQUISA BÁSICA**

**ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS
ELETROMAGNÉTICAS NA REGIÃO-FONTE
DA RADIAÇÃO QUILOMÉTRICA AURORAL**

Bianca Eliza Corrêa

Monografia realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rudi Gaelzer, apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre

22 de fevereiro de 2024

RESUMO

A magnetosfera terrestre é fonte da chamada Radiação Quilométrica das Auroras (AKR, de *Auroral Kilometric Radiation*), que se refere ao fenômeno de emissão e amplificação de ondas de rádio nas regiões polares. O mecanismo de amplificação aceito é o *maser* de elétron-ciclotron. Este prevê valores positivos para o fator de amplificação das ondas quando a função distribuição das partículas do meio apresenta regiões no espaço de velocidades com gradientes majoritariamente positivos. Os eventos observados de AKR estão associados à precipitação de elétrons energéticos, oriundos de subtempestades magnetosféricas, no sentido de linhas de campo magnético convergentes. Os elétrons são acelerados através de um campo elétrico ascendente, e, devido ao efeito de espelhamento magnético, algumas dessas partículas são "refletidas", e outras perdidas no contato com o plasma ionosférico de maior densidade. Esta redução do fluxo de elétrons no sentido ascendente gera a inversão de população na função distribuição necessária para o *maser*. Neste trabalho, a função distribuição dos elétrons magnetosféricos é modelada utilizando uma distribuição na forma de C-invertido, ou *horseshoe*. Seu aspecto de "cone de perda" é definido pela hipérbole de perda, prevista quando se acrescenta o campo elétrico ao sistema formado pelo campo magnético terrestre e as partículas. Além disso, aplica-se a teoria magneto-iônica e a linearização do sistema Vlasov-Maxwell de equações para obter o índice de refração do modo extraordinário rápido (*X*). A expressão para o índice de refração é então utilizada para escrever explicitamente as equações de traçado de raios, que fornecem a evolução temporal da trajetória das ondas ao longo da região-fonte. Para o cálculo da variação da intensidade radiativa ao longo do deslocamento do raio, são considerados os processos de emissão induzida e espontânea, relacionados ao movimento de ciclotron das partículas. Os resultados obtidos mostram que o modelo adotado prevê amplificação substancial de ondas no modo *X*, a partir da radiação térmica de fundo, corroborando assim as teorias vigentes acerca da geração da AKR.

ABSTRACT

The Earth's magnetosphere is source of the Auroral Kilometric Radiation (AKR), which refers to the phenomenon of emission and amplification of radio waves in the polar regions. The accepted amplification mechanism is the electron-cyclotron maser. This mechanism predicts positive values for the wave amplification factor when the particle distribution function of the medium has regions in velocity space with mostly positive gradients. The observed AKR events are associated with the precipitation of energetic electrons, originating from magnetospheric substorms, towards converging magnetic field lines. The electrons are accelerated through an ascending electric field, and, due to the magnetic mirroring effect, some of these particles are "reflected", and others are lost in contact with the ionospheric plasma of higher density. This reduction in the upward flow of electrons generates the population inversion in the distribution function necessary for the maser. In this work, the magnetospheric electrons distribution function is modeled using an inverted-C (or horseshoe) distribution. Its "loss cone" aspect is defined by the loss hyperbola, predicted when an electric field is added to the system formed by the particles and Earth's magnetic field. Moreover, the magnetoionic theory and the linearization of the Vlasov-Maxwell system of equations are applied to obtain the refractive index of the fast extraordinary mode (X). The expression for the index of refraction is then used to explicitly write the ray tracing equations, which provide the time evolution of the wave trajectory along the source region. To calculate the variation in radiation intensity along the the ray path, the induced and spontaneous emission processes are considered, related to the particles' cyclotron motion. The results obtained show that the adopted model predicts substantial amplification of waves in the X mode, from background thermal radiation, thus corroborating current theories about the generation of AKR.

SUMÁRIO

1	Introdução	4
1.1	Objetivo	4
1.2	A Radiação Quilométrica Auroral	4
1.3	Modelos para os parâmetros físicos	8
1.3.1	Populações eletrônicas	8
1.3.2	Parâmetros da região-fonte	9
1.3.2.1	Densidade dos elétrons ionosféricos	9
1.3.2.2	Densidade eletrônica total	9
1.3.2.3	Temperatura dos elétrons magnetosféricos	10
1.3.2.4	Potencial elétrico	10
1.3.2.5	Campo magnético	10
2	Teoria Magneto-iônica	11
2.1	Introdução	11
2.2	A Equação de Vlasov	11
2.2.1	A função de distribuição	11
2.2.2	A equação de Vlasov	12
2.3	O Modelo de Plasma Frio	12
2.3.1	Velocidade média, momentos de $f_\alpha(r, v, t)$ e velocidade peculiar	12
2.3.2	Equações de transporte macroscópicas	13
2.3.2.1	Equação da Continuidade	13
2.3.2.2	Equação de Movimento	13
2.4	Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Frios Magnetizados	13
2.4.1	Linearização e Soluções para Ondas Harmônicas	13
2.4.2	Relação de Dispersão	14
2.4.3	Modos de Oscilação	15
2.4.3.1	Caso particular: $\theta = \pi/2$	15
2.4.3.2	θ arbitrário	16
3	Traçado de Raios e Equação de Transferência Radiativa	18
3.1	Introdução	18
3.2	Equações de Traçado de Raios	18
3.2.1	Forma alternativa	19
3.3	Aplicação a um Plasma Frio Magnetizado	19
3.3.1	Sistema de Coordenadas	20
3.3.2	Sistema de Equações	20
3.3.3	Aplicação ao Modo Extraordinário	21
3.4	Equação de Transferência Radiativa	22
3.5	Cálculos para as Equações de Traçado de Raios no Modo Extraordinário	24
4	Resultados e Considerações Finais	27
4.1	Resultados	27
4.2	Considerações Finais	28

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo a investigação do mecanismo da emissão de elétron-cíclotron e aplicá-lo ao estudo do processo de emissões de ondas de rádio que ocorre na região polar da magnetosfera terrestre, conhecido como *Radiação Quilométrica Auroral* (*Auroral Kilometric Radiation*, AKR). A investigação será composta pelos seguintes elementos:

- aplicação de um modelo para os parâmetros físicos das diferentes populações de partículas que compõe o plasma na região-fonte da AKR, tais como densidade, temperatura, velocidade de deriva, bem como para o campo magnético ambiente;
- aproximação do plasma da região de interesse, para a realização do traçado de raios, como um plasma frio magnetizado, de forma a utilizar os modos de oscilação de ondas de alta frequência obtidos por meio da teoria magneto-iônica;
- uso da técnica de traçado de raios da óptica geométrica para calcular a trajetória da radiação gerada pelo mecanismo de elétron-cíclotron;
- o emprego de um formalismo semi-clássico para a equação de transferência radiativa, que descreve a evolução da intensidade da onda ao longo da sua trajetória.

1.2 A Radiação Quilométrica Auroral

As ondas emitidas pela magnetosfera terrestre, consideradas neste trabalho, são chamadas de Radiação Quilométrica Auroral devido à ordem de grandeza de seus comprimentos de onda, e por se originarem acima das regiões polares, onde ocorrem eventos de aurora. A sua natureza é eletromagnética, com potência total típica em torno de $10^7 W$, cuja faixa de frequência com maior intensidade espectral é de 100 a $300 kHz$ (Figura 1.1) (Cavalcanti, 2001) [2], (Pavan, 2007) [8].

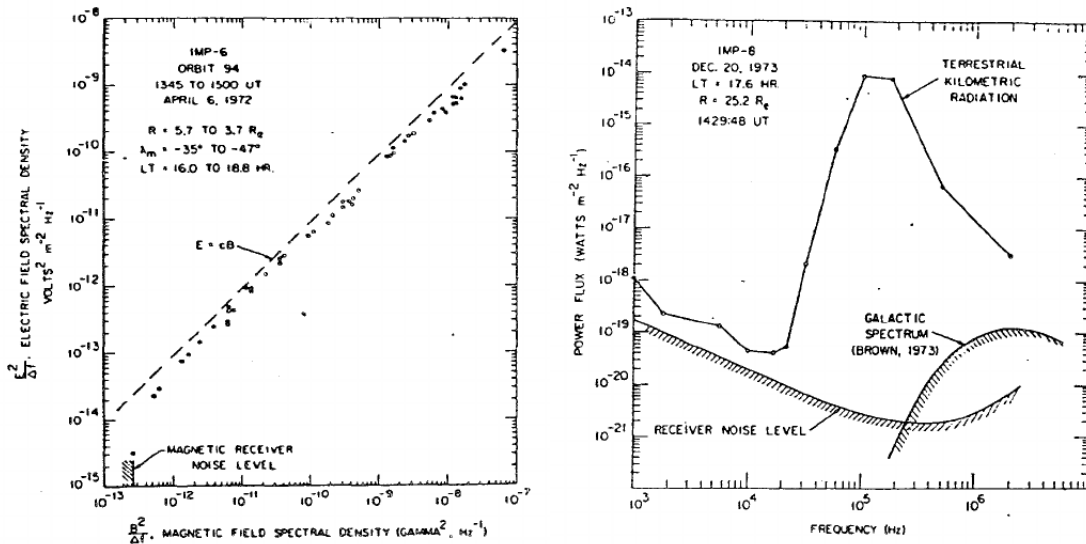


Figura 1.1: À esquerda: Relação linear entre os campos elétrico e magnético da AKR. À direita: Densidade de fluxo de potência da AKR.[2]

A partir da aproximação de plasma frio, e quando a contribuição dos íons é desconsiderada, a teoria de propagação de ondas em plasmas prevê quatro modos possíveis de oscilação: *whistler* (*W*), extraordinário lento (*Z*), ordinário (*O*) e extraordinário rápido (*X*). Todos esses modos são observados na AKR, embora a maior contribuição para a intensidade seja do modo *X* [2].

Sobre a localização da origem da radiação, a conclusão é que a região-fonte deve estar entre 2 e $5R_\oplus$ (R_\oplus : raio terrestre), com intervalo de latitude magnética invariante entre 68° e 80° . Tal região é composta por subregiões com valores locais de densidade eletrônica mais baixas, formando o que são chamadas cavidades eletrônicas. Nessas cavidades, a razão entre a frequência de plasma e a frequência de ciclotron já foi medida em 0,03 por volta de $1,8R_\oplus$ de altitude (Figura 1.2).

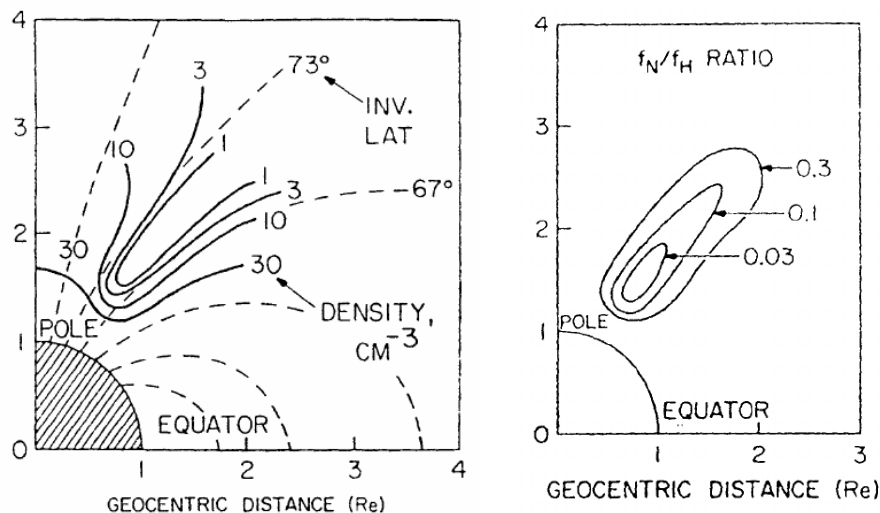


Figura 1.2: À esquerda: contornos de densidade na cavidade, e sua distribuição em latitude magnética invariante e raios terrestres (R_e). À direita: razão entre a frequência de plasma e a frequência de ciclotron dos elétrons na cavidade. [2]

Uma observação importante acerca das emissões de AKR, descrita com mais detalhes em (Gaelzer, 1991) [5, Seção II.5], é a sua relação com eventos de precipitação de elétrons do tipo

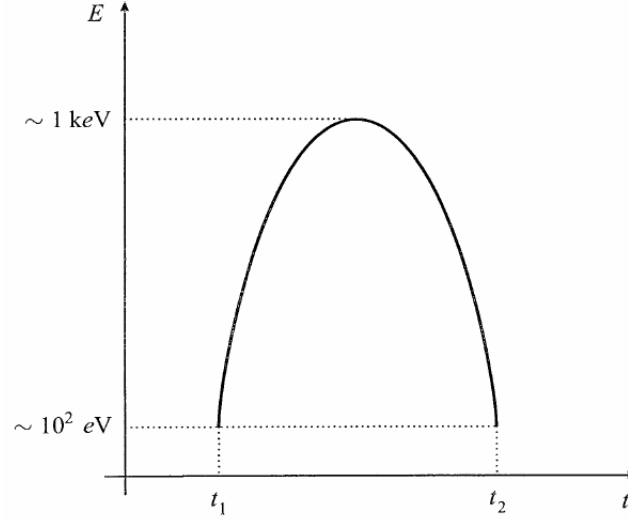


Figura 1.3: Forma do espectrograma em eventos de V-invertido [2].

V-invertido. Esse tipo de evento se caracteriza pela forma tomada pelo espectrograma energia-tempo quando o satélite cruza a região do fluxo de elétrons (Figura 1.3). Quando ocorrem fenômenos chamados de *subtormentas magnetosféricas*, partículas do vento solar são injetadas nas regiões polares através de processos que têm início na cauda da magnetosfera. Esse tipo de anisotropia na distribuição de velocidades das partículas nas regiões aurorais é considerada uma das fontes de energia livre disponíveis para estimular eventos de AKR.

A evidência apresentada pelos eventos de V-invertido sugere a existência de campos elétricos quase estáticos ascendentes, paralelos ao campo geomagnético. Esta hipótese é reforçada com a observação de íons positivos acelerados a partir da ionosfera com energias da ordem $\sim \text{keV}$ [5].

As distribuições das partículas durante esses eventos podem ser entendidas a partir da dinâmica destas com os campos magnético e elétrico existentes. Como o plasma nas cavidades possui baixa densidade, as colisões são desprezadas, então a evolução do movimento da partícula (um elétron, por exemplo) deve ser tal que mantenha constantes as grandezas adiabáticas energia total E e momento magnético μ_m :

$$E = \frac{1}{2} m_e (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - eV \quad (1.1)$$

$$\mu_m = \frac{m_e v_{\perp}^2}{2B}, \quad (1.2)$$

onde m_e é a massa do elétron, e é sua carga, v_{\parallel} e v_{\perp} são as componentes paralela e perpendicular da velocidade do elétron em relação ao campo magnético ambiente B , e V é o potencial elétrico. As convenções adotadas em [5] são as seguintes: sejam dois pontos $s = 0$ e $s = l$ ao longo das linhas de campo magnético ($0 \leq s \leq l$, com altitude em $s = 0$ denotando o equador magnético, e sendo maior que em $s = l$), o campo elétrico ascendente é definido com $V(s = 0) \equiv V_0 = 0$ e $V(s = l) \equiv V_l$, $V_0 < V < V_l$. Para o campo magnético, da mesma forma, a relação é $B_0 < B < B_l$. Define-se também $v_{\parallel} > 0$ para elétrons descendentes. A partir de (1.1) e (1.2) são encontradas então duas curvas no espaço de velocidades, a partir das quais é possível identificar as diferentes populações formadas pela influência dos campos elétrico e magnético: a hipérbole de perda,

$$v_{\parallel s}^2 + \left[1 - \frac{B_l}{B_s}\right] v_{\perp s}^2 + \frac{2e}{m_e} (V_l - V_s) = 0, \quad (1.3)$$

que divide os elétrons que são espelhados para $s \geq l$ devido às linhas de campo magnético convergentes, daqueles que são perdidos na ionosfera; e a elipse

$$v_{\parallel s}^2 + \left[1 - \frac{B_0}{B_s}\right] v_{\perp s}^2 - \frac{2e}{m_e} V_s = 0,$$

que separa os elétrons que são freados ou escapam do campo elétrico ascendente. Fazendo referência à Figura 1.4, os elétrons são divididos em 5 populações em diferentes regiões [5]:

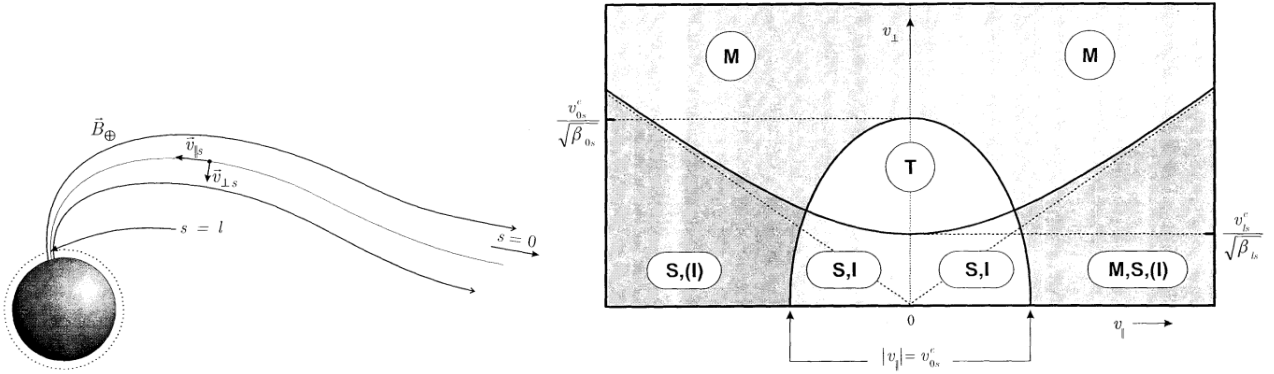


Figura 1.4: À esquerda: Sistema de coordenadas adotado, com as definições para os pontos $s = 0$ e $s = l$. À direita: Hipérbole e elipse que delimitam as populações de elétrons.[2]

1. M,S,(I): elétrons de origem magnetosférica acelerados pelo campo elétrico, que compõem os feixes de V-invertido (M); elétrons de origem ionosférica do hemisfério conjugado ((I)); ambos podem ter sido refletidos (S);
2. M, $v_{\parallel} < 0$: elétrons espelhados em $s \geq l$;
3. S,(I): elétrons espelhados em $s \leq l$; elétrons de origem ionosférica, com energia para escapar do potencial elétrico;
4. S,I: elétrons espelhados em $s \leq l$; elétrons de origem ionosférica, sem energia para escapar do potencial elétrico;
5. T: elétrons espelhados em $s > l$, sem energia para escapar do potencial elétrico, ficando aprisionados entre dois pontos ao longo de uma linha de campo magnético.

Com base nas constantes (1.1) e (1.2), pode-se escrever

$$v_{\perp s}^2 = \frac{2\mu_m}{m_e} B_s, \quad v_{\parallel s}^2 = \frac{2}{m_e} (E - \mu_m B_s + eV_s), \quad v_s = \sqrt{v_{\perp s}^2 + v_{\parallel s}^2} = \sqrt{\frac{2}{m_e} (E + eV)}, \quad (1.4)$$

$$\sin \alpha_s = \frac{v_{\perp s}}{v_s} = \sqrt{\frac{\mu_m B_s}{E + eV_s}}, \quad \cos \alpha_s = \frac{v_{\parallel s}}{v_s} = \pm \sqrt{\frac{E - \mu_m B_s + eV_s}{E + eV_s}},$$

onde α_s é o ângulo de arremesso (ou *pitch angle*) entre o vetor velocidade do elétron e o campo magnético local. A condição para que um elétron seja refletido no topo da ionosfera ($s = l$) é $v_{\parallel l} = 0$, ou

$$\sin \alpha_l = 1 \implies \mu_{mL} B_l = E + eV_l,$$

e elétrons com $\sin \alpha_l < 1$ se precipitam na ionosfera e são considerados perdidos. Assim, a partir de $v_{\perp s}^2 = v_s^2 \sin^2 \alpha_s$ e das definições em (1.4), o ângulo de arremesso de um elétron cujo momento magnético é μ_{mL} é dado por

$$\alpha_{Ls} = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{B_s E + eV_l}{B_l E + eV_s}} \right) = \cos^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{B_s E + eV_l}{B_l E + eV_s}} \right). \quad (1.5)$$

Este último resultado é utilizado na modelagem apresentada da função distribuição.

A distribuição resultante da interação com os campos apresenta uma depleção no sentido ascendente, correspondente à perda para a ionosfera dos elétrons que não são refletidos num ponto $s \geq l$, como pode ser notado para $v_{\parallel} < 0$ na Figura 1.5. A região com menor densidade eletrônica no espaço de velocidades faz surgir gradientes positivos em relação a v_{\perp} , configuração necessária para a amplificação das ondas como indicado pela expressão para a taxa de amplificação - equação (3.27).

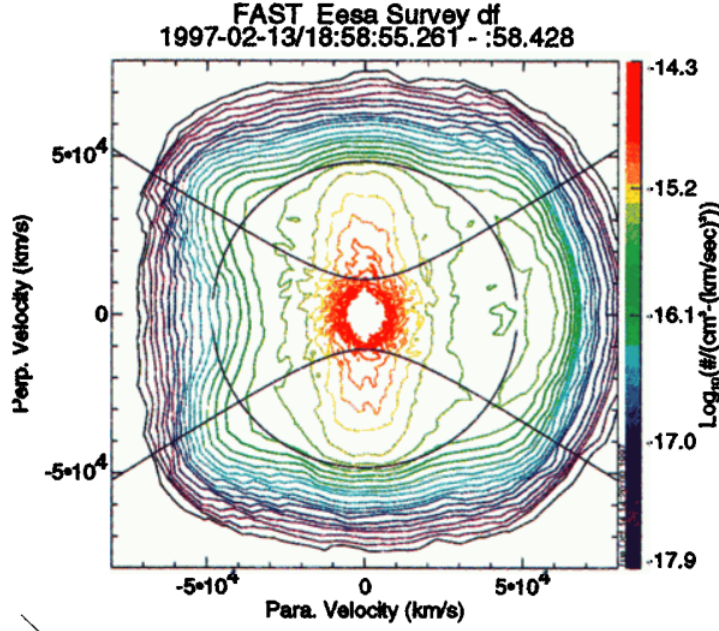


Figura 1.5: Curvas de contorno da população de elétrons medidas na região-fonte da AKR. [3]

1.3 Modelos para os parâmetros físicos

1.3.1 Populações eletrônicas

Neste trabalho, serão utilizados dois modelos para as distribuições de partículas, com finalidades diferentes. A distribuição que será utilizada no cálculo dos coeficientes de emissão/absorção induzida e de emissão espontânea (Seção 3.4) será dada, em termos do momento adimensional $u = p/m_e c$ e de $\mu = u_{\parallel}/u = \cos\alpha$, por

$$F_e(u, \mu) = \frac{n_e}{n_{Te}} f_0(u) + \frac{n_{Me}}{n_{Te}} F_b(u, \mu), \quad f_0(u) = \frac{e^{-u^2/\beta_0^2}}{(\sqrt{\pi}\beta_0)^3}, \quad \text{sendo } \beta_0 = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e c^2}}, \quad (1.6)$$

$$F_b(u, \mu) = \frac{g(\mu)}{\pi^{3/2} \alpha_{Ls}^3 A_u A_{\mu}} \exp\left[-\frac{(u - u_0)^2}{\alpha_{Ls}^2}\right], \quad g(\mu) = \text{sech}^2\left(\frac{\mu - \mu_0}{\delta_s}\right), \quad (1.7)$$

$$A_u = \left(1 + \frac{2u_0^2}{\alpha_{Ls}^2}\right) \left[1 + \text{erf}\left(\frac{u_0}{\alpha_{Ls}}\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{u_0}{\alpha_{Ls}} e^{-u_0^2/\alpha_{Ls}^2}$$

$$A_{\mu} = \frac{\delta_s}{2} \left(\tanh\frac{1 - \mu_0}{\delta_s} + \tanh\frac{1 + \mu_0}{\delta_s}\right),$$

onde n_e e T_e são a densidade e temperatura dos elétrons ionosféricos, n_{Me} a densidade dos elétrons magnetosféricos, e $n_{Te} = n_{Me} + n_e$. Outros parâmetros são dados por

$$\alpha_{Ls} = \cos^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{B_s u_0^2 + 2eV_i/m_e c^2}{B_l u_0^2 + 2eV_s/m_e c^2}} \right) \quad \delta_s = \left[\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \bar{g}}}{\sqrt{\bar{g}}} \right) \right]^{-1} (1 + \cos \alpha_{Ls}),$$

$$g(\mu_{Ls}) = \bar{g}, \quad \mu_{Ls} = \cos \alpha_{Ls}, \quad \mu_0 = \cos \alpha_0$$

onde, em α_{Ls} , a energia E em (1.5) foi substituída pela energia cinética média em termos do momento adimensional, α_0 é o ângulo central na distribuição angular da horseshoe, e u_0 é calculado com base em valores observados (Ergun et al, 2000) [4]

$$v_0 \simeq 5 \times 10^4 \text{ km/s} \implies u_0 = \frac{v_0}{c} \rightsquigarrow u_0 \simeq 0.167.$$

Escrevendo as componentes de v em termos das componentes do momento adimensional na hipérbole de perda (1.3), $(v_{\parallel}, v_{\perp}) = (c^2 u_{\parallel}, c^2 u_{\perp})$,

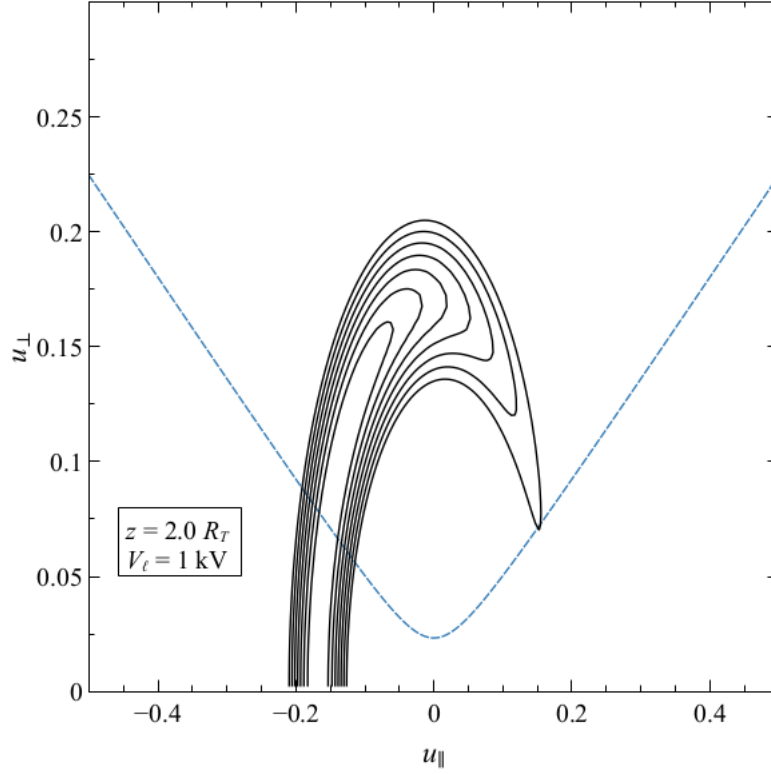


Figura 1.6: Curvas de contorno de $F_b(u, \mu)$, presente na distribuição (1.6), e a hipérbole de perda (1.8).

$$u_{\parallel s}^2 + \left(1 - \frac{B_l}{B_s}\right) u_{\perp s}^2 = \frac{2e}{m_e c^2} (V_s - V_l). \quad (1.8)$$

A curva (1.8) está representada na Figura 1.6, junto com a distribuição $F_b(u, \mu)$ (1.6).

1.3.2 Parâmetros da região-fonte

Os parâmetros como as densidades das diversas populações da região-fonte, temperaturas, campo magnético ambiente, potencial elétrico, que aparecem em (1.6) e nas equações de traçado de raios (Subseção 3.3.3), serão calculados a partir do modelo desenvolvido em [5, Capítulo VI, Apêndice A]. Abaixo estão alguns exemplos de tais parâmetros.

1.3.2.1 Densidade dos elétrons ionosféricos

$$n_e = N_{Ie} e^{-\lambda_e v_{Ie}^2} \left[1 - \left(\frac{\beta_{Ie}}{\gamma_{Ie}} \right)^{1/2} e^{-\lambda_e v_{Ie}^2 / \beta_{Ie}} \right],$$

onde N_{Ie} é a densidade eletrônica em $s = l$ (densidade eletrônica dos elétrons ionosféricos na Tabela 4.1), e

$$\lambda_e = \frac{m_e}{2T_e}, \quad v_{Ie}^e = \frac{2}{m_e} |e(V_l - V_s)|, \quad \beta_{Ie} = \left| 1 - \frac{B_l}{B_s} \right|, \quad \gamma_{Ie} = \frac{B_l}{B_s}.$$

1.3.2.2 Densidade eletrônica total

A densidade eletrônica total, em função da latitude x e coordenada s , é assumida como

$$n_{Te}(x, s) = \bar{n}_e(s) - [\bar{n}_e(s) - n_{ce}(s)] e^{-(x/L)^2},$$

onde L é a largura da cavidade eletrônica, \bar{n}_e é a densidade eletrônica total na borda, e n_{ce} é a densidade eletrônica total no centro.

1.3.2.3 Temperatura dos elétrons magnetosféricos

$$T_{Me}(x, s) = \bar{T}_e(s) + [T_{Me}(s) - \bar{T}_e(s)]e^{-(x/L)^2},$$

onde \bar{T}_e e T_{Me} são a temperatura eletrônica fora da cavidade e dos elétrons magnetosféricos no seu centro, respectivamente.

1.3.2.4 Potencial elétrico

A forma utilizada no modelo para o potencial elétrico é

$$V_s = V_l \frac{\sqrt{B_s} - \sqrt{B_0}}{\sqrt{B_l} - \sqrt{B_0}}.$$

1.3.2.5 Campo magnético

A magnitude do campo magnético é aproximada por

$$B = \frac{0,6}{z_{\oplus}^3},$$

onde $z_{\oplus} = z/R_{\oplus}$.

CAPÍTULO 2

TEORIA MAGNETOIÔNICA

2.1 Introdução

A Teoria Magneto-iônica é aplicada a situações em que o plasma pode ser visto como um fluido condutor no qual apenas a dinâmica dos elétrons é considerada importante, sendo desprezada a participação dos íons nos fenômenos estudados. Efeitos de origem térmica também são negligenciados, e o gás de elétrons é suposto sem colisões. Além dessas aproximações referentes ao plasma, o campo magnético ambiente é considerado estático e homogêneo.

Nesse capítulo, as equações para o estudo de ondas eletromagnéticas no plasma são obtidas a partir do formalismo da teoria cinética de plasmas, e as grandezas que dão origem a efeitos térmicos são então desprezadas.

2.2 A Equação de Vlasov

2.2.1 A função de distribuição

A teoria magneto-iônica descreve a evolução das partículas e campos de um plasma usando um formalismo de fluido. Será apresentada agora uma breve derivação das equações de fluido (e da teoria magneto-iônica) a partir da formulação mais completa da teoria cinética dos plasmas [Bittencourt, 2004] [1]. A definição utilizada para caracterizar uma população de partículas é a chamada *função de distribuição* $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, definida no espaço de fase de forma que a quantidade

$$d\mathcal{N}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v$$

representa o número de partículas da espécie α que se encontram no espaço d^3r em torno de \mathbf{r} , com velocidade no intervalo d^3v em torno de \mathbf{v} , no instante t .

Para determinar a evolução da função f_α num instante posterior $t + dt$, considera-se uma quantidade de partículas $d\mathcal{N}_\alpha$ sob efeito de uma força externa $\mathbf{F} = m_\alpha \mathbf{a}$. Como não são consideradas perdas nem ganhos de partículas através de colisões entre as mesmas, a sua quantidade é conservada:

$$f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + dt)d^3r' d^3v' = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v, \quad (2.1)$$

onde $d^3r' d^3v'$ é o novo elemento de volume no espaço de fase em torno das novas coordenadas $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$. Mostra-se em [1] que a relação entre os elementos de volume em instantes diferentes é

$$d^3r' d^3v' = d^3r d^3v,$$

sendo então possível reescrever a equação (2.1) como

$$[f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{a}dt, t + dt) - f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]d^3r d^3v = 0. \quad (2.2)$$

Expandindo o primeiro termo da equação acima numa série de Taylor em torno de $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, mantendo apenas termos proporcionais a dt :

$$f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{a}dt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left[\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right] dt$$

onde ∇_v é o operador gradiente no espaço de velocidades. Inserindo esse resultado na equação (2.2) resulta

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é chamada *equação de Boltzmann* na ausência de colisões.

2.2.2 A equação de Vlasov

A ideia por trás das equações de Vlasov vem da necessidade do tratamento das interações de longa distância existentes no plasma. Como explicado em *Melrose (1980) [6]*, uma vez que a dinâmica de cada partícula é influenciada pela presença de todas as outras (através dos campos que estas geram), determinar a evolução do sistema a nível microscópico não é factível.

Apesar da equação de Boltzmann ser deduzida considerando apenas forças externas aplicadas ao sistema, a equação de Vlasov é obtida supondo que se possa escrever

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são interpretados como grandezas médias dos campos elétrico e magnético microscópicos, intrínsecos ao plasma, \mathbf{F}_{ext} representa a força externa, e q_α e m_α são a carga e a massa das partículas da espécie α .

Os campos médios presentes na equação (2.4) devem então ser determinados com o auxílio das equações de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (2.5d)$$

sendo que a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e a densidade de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ estão relacionadas com f_α por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.6)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3v \quad (2.7)$$

com as somas em α ilustrando o efeito da presença de todas as outras espécies de partículas na equação (2.4). O sistema de equações que descreve a evolução do plasma é formado então pelo sistema Vlasov-Maxwell de equações (2.4) e (2.5).

2.3 O Modelo de Plasma Frio

2.3.1 Velocidade média, momentos de $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ e velocidade peculiar

Tratando o plasma como um fluido, uma grandeza importante é a *velocidade média* da população α , calculada por

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v,$$

onde

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

é a densidade de número de partículas independente de velocidade. As quantidades $u_\alpha(\mathbf{r}, t)$ e $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$ são exemplos dos chamados *momentos da função de distribuição*. De modo geral, os momentos são obtidos multiplicando f_α por produtos entre as componentes de \mathbf{v} , e integrando sobre o espaço de velocidades.

A *velocidade peculiar* é definida a partir da velocidade média como

$$\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha.$$

Ou seja, é uma medida do desvio da velocidade da partícula em relação ao fluxo macroscópico da espécie como um todo. Essa velocidade, de caráter aleatório, dá origem a efeitos térmicos.

2.3.2 Equações de transporte macroscópicas

As equações que determinam a evolução das grandezas macroscópicas do sistema podem ser obtidas da equação (2.3) sem a necessidade de resolvê-la para encontrar f_α primeiramente. Como descrito em *Bittencourt (2004) [1]*, o procedimento parte do cálculo dos momentos da equação de Boltzmann (2.3), multiplicando-a pela propriedade física de interesse $\chi(\mathbf{v})$ e integrando sobre o espaço de velocidades. A forma geral para a equação de transporte fica escrita como

$$\frac{\partial(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = 0. \quad (2.8)$$

2.3.2.1 Equação da Continuidade

Quando a propriedade χ na equação (2.8) é a massa, $\chi = m_\alpha$, o resultado é a *equação da continuidade*:

$$m_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + m_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0. \quad (2.9)$$

2.3.2.2 Equação de Movimento

Se a propriedade for o momentum das partículas, $\chi = m_\alpha \mathbf{v} = m_\alpha (\mathbf{c}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha)$. Desprezando efeitos térmicos, $\mathbf{c}_\alpha = 0$, e a equação (2.8) fica

$$n_\alpha m_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + n_\alpha m_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha - n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.10)$$

onde foram utilizadas a equação (2.9) e a força de Lorentz com os campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} (Subseção 2.2.2).

O sistema formado pelas equações (2.5), (2.9) e (2.10) será utilizado para o estudo da propagação de ondas em plasmas.

2.4 Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Frios Magnetizados

Para o estudo da propagação de ondas em plasmas, será considerado um plasma frio, sem colisões, e um campo magnético ambiente estático e uniforme. O movimento dos íons será desprezado, então as grandezas n , m , \mathbf{u} e q ($-e$, nesse caso) se referem apenas aos elétrons.

2.4.1 Linearização e Soluções para Ondas Harmônicas

O processo de linearização do sistema de equações formado por (2.5) e (2.10) é feito considerando pequenas perturbações nas variáveis em relação ao estado de equilíbrio do plasma,

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}) + \varepsilon n_1(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 + \varepsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t),$$

onde os subscritos 0 e 1 indicam a solução das equações no estado de equilíbrio e a perturbação, respectivamente. Essas soluções são então substituídas no sistema, e apenas termos de primeira ordem em ε são mantidos ($\varepsilon \ll 1$).

No contexto do estudo de ondas se propagando no plasma, supõe-se que as perturbações introduzidas variam harmonicamente no espaço e no tempo

$$n_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1 \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)],$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda e ω é a frequência angular da onda. Quando se substitui esse tipo de solução nas equações linearizadas, obtêm-se as equações algébricas

$$-i\omega m \mathbf{u}_1 = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1 \quad (2.11b)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 = \mu_0(-en_0 \mathbf{u} - i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_1) \quad (2.11c)$$

que fornecem informações dos diferentes modos de oscilação das ondas suportadas por um plasma.

2.4.2 Relação de Dispersão

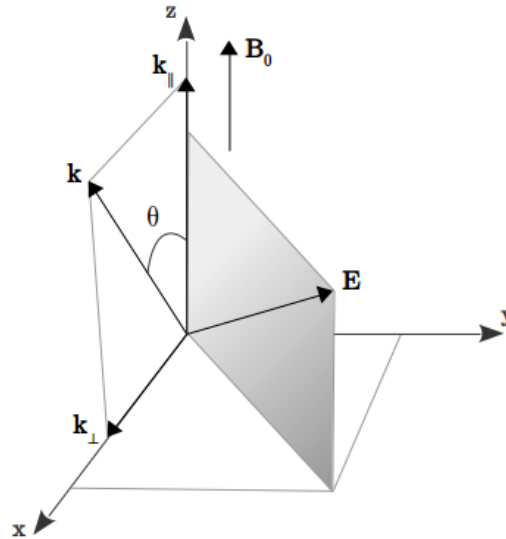


Figura 2.1: Sistema de coordenadas definido para resolver o sistema (2.11).

Manipulando as expressões (2.11), utilizando o sistema de coordenadas definido na Figura 2.1, encontra-se o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} (S - \eta^2 \cos^2 \theta) & -iD & \eta^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & (S - \eta^2) & 0 \\ \eta^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & (P - \eta^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

onde

$$S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}, \quad D = -\frac{XY}{1 - Y^2}, \quad P = 1 - X, \quad (2.13)$$

$$Y = \frac{\Omega_{ce}}{\omega}, \quad X = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (2.14)$$

$\Omega_{ce} = eB_0/m$ é a frequência angular de ciclotron dos elétrons, $\omega_{pe} = (n_0 e^2 / m \varepsilon_0)^{1/2}$ é a frequência angular de plasma dos elétrons, e $\eta = (kc/\omega)$ é o índice de refração do meio. Para uma solução com $\mathbf{E} \neq 0$, o determinante da matriz em (2.12) deve ser nulo, o que resulta

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = (S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) \eta^4 - [RL \sin^2 \theta + SP(1 + \cos^2 \theta)] \eta^2 + PRL = 0 \quad (2.15)$$

com

$$R = S + D, \quad L = S - D, \implies S = \frac{1}{2}(R + L), \quad D = \frac{1}{2}(R - L).$$

A expressão $\Lambda(k, \omega, r)$ é a *equação de dispersão*, e suas soluções são as *relações de dispersão*, que nesse caso relacionam as variáveis k e ω . Escrevendo (2.15) como

$$A\eta^4 - B\eta^2 + C = 0, \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= S\sin^2\theta + P\cos^2\theta \\ B &= RL\sin^2\theta + SP(1 + \cos^2\theta) \\ C &= PRL. \end{aligned}$$

Segue que as soluções para (2.16) em termos de η^2 são

$$\eta^2 = \frac{1}{2A} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right). \quad (2.17)$$

Manipulando (2.17) é possível chegar na seguinte forma para a relação de dispersão

$$\eta^2 = 1 - \frac{X}{Q}, \quad (2.18)$$

conhecida como a *equação de Appleton-Hartree*, e onde

$$Q = 1 - \frac{Y^2 \sin^2\theta}{2(1-X)} \pm \left[\frac{Y^4 \sin^4\theta}{4(1-X)^2} + Y^2 \cos^2\theta \right]^{1/2}. \quad (2.19)$$

2.4.3 Modos de Oscilação

2.4.3.1 Caso particular: $\theta = \pi/2$

Para o caso em que a onda se propaga perpendicularmente ao campo magnético ambiente ($k \perp B_0$), a expressão (2.19) fica

$$Q_{\pm} = 1 - \frac{Y^2}{2(1-X)} \pm \frac{Y^2}{2(1-X)},$$

e a partir de (2.18) são obtidos os modos de oscilação.

O modo *ordinário* é definido como tendo a relação de dispersão

$$\eta_o^2 = 1 - \frac{X}{Q_+} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (2.20)$$

e possui um *ponto de reflexão* ($\eta = 0$) em $\omega = \omega_{pe}$, denominada *frequência de corte*. O intervalo de frequência onde $\omega \leq \omega_{pe}$ ($\eta_o^2 \leq 0$) é chamado de região *evanescente*, na qual não existe propagação.

A outra solução é chamada de modo *extraordinário* de oscilação, e a relação de dispersão é dada por

$$\begin{aligned} \eta_x^2 &= 1 - \frac{X}{Q_-} \\ &= \frac{(\omega^2 + \omega\Omega_{ce} - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega\Omega_{ce} - \omega_{pe}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \Omega_{ce}^2)} \\ &= \frac{1}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \Omega_{ce}^2)} \left[\omega - \frac{1}{2} \left(-\Omega_{ce} + \sqrt{\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) \right] \left[\omega - \frac{1}{2} \left(-\Omega_{ce} - \sqrt{\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\omega - \frac{1}{2} \left(\Omega_{ce} + \sqrt{\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) \right] \left[\omega - \frac{1}{2} \left(\Omega_{ce} - \sqrt{\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) \right], \end{aligned}$$

onde as duas expressões quadráticas no numerador foram fatoradas. Multiplicando o último fator no numerador com o primeiro, e os restantes entre si, resulta

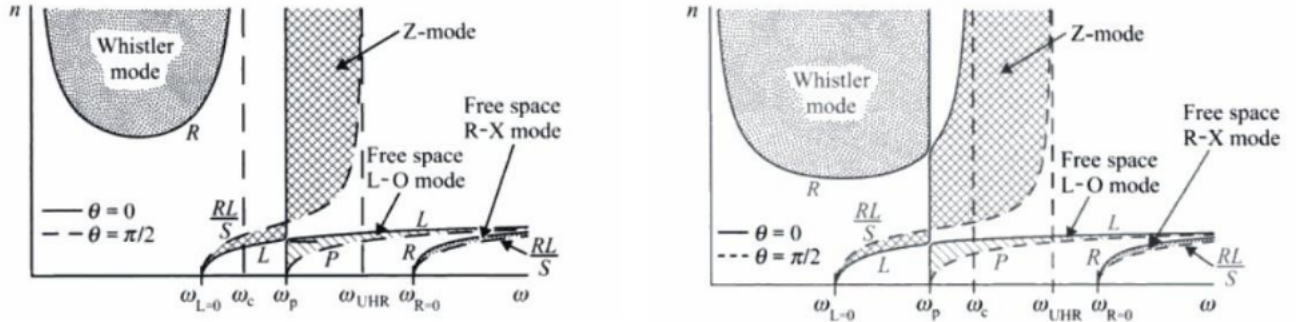


Figura 2.2: Curvas para o índice de refração em função da frequência. Equivalência entre a notação neste trabalho e a figura acima: $\omega_{L=0} = \omega_{01}$, $\omega_{R=0} = \omega_{02}$, $\omega_{UHR} = \omega_{uh}$, $\omega_c = \Omega_{ce}$, $\omega_p = \omega_{pe}$. À esquerda, $\omega_{pe} > \Omega_{ce}$. À direita, $\omega_{pe} < \Omega_{ce}$. As linhas contínuas se referem a $\theta = 0$, e as linhas tracejadas se referem a $\theta = \pi/2$. [10]

$$\eta_x^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{uh}^2)}, \quad (2.21)$$

onde

$$\omega_{01} = \frac{1}{2} \left(-\Omega_{ce} + \sqrt{\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right), \quad (2.22)$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{2} \left(\Omega_{ce} + \sqrt{\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) = \omega_{01} + \Omega_{ce}, \quad (2.23)$$

e ω_{uh} é a chamada *frequência híbrida superior*:

$$\omega_{uh} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_{ce}^2}. \quad (2.24)$$

Observando (2.21), fica claro que o modo extraordinário possui pontos de reflexão em $\omega = \omega_{01}$ e $\omega = \omega_{02}$, e um *ponto de ressonância* ($\eta \rightarrow \pm\infty$) em $\omega = \omega_{uh}$.

Analisando as expressões (2.22), (2.23) e (2.24), chega-se à relação $\omega_{01} < \omega_{uh} < \omega_{02}$. Então, a partir de (2.21),

$$\begin{aligned} \omega < \omega_{01} &\longrightarrow \eta_x^2 < 0, \\ \omega_{01} < \omega < \omega_{uh} &\longrightarrow \eta_x^2 > 0, \\ \omega_{uh} < \omega < \omega_{02} &\longrightarrow \eta_x^2 < 0, \\ \omega > \omega_{02} &\longrightarrow \eta_x^2 > 0. \end{aligned}$$

Conclui-se que só há propagação no modo extraordinário para frequências nos intervalos $\omega_{01} < \omega < \omega_{uh}$ e $\omega > \omega_{02}$.

2.4.3.2 θ arbitrário

Para direções de propagação arbitrárias em relação ao campo magnético ambiente, pode ser visto a partir de (2.17) que os pontos de ressonância ocorrem quando $A = 0$, ou seja

$$S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta = 0.$$

Utilizando as definições (2.13) e (2.14), a expressão acima fica

$$\begin{aligned} (1 - Y^2) - X + XY^2 \cos^2 \theta &= 0 \\ \Rightarrow \omega^4 - (\Omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) \omega^2 + \Omega_{ce}^2 \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta &= 0, \end{aligned}$$

e as soluções para ω^2 fornecem os pontos de ressonância em função de θ :

$$\omega_{0\pm}^2 = \frac{1}{2} (\Omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) \pm \left[\frac{1}{4} (\Omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2)^2 - \Omega_{ce}^2 \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (2.25)$$

As curvas de ressonância tomam as formas na Figura 2.3 dependendo dos casos $\Omega_{ce} < \omega_{pe}$ ou $\Omega_{ce} > \omega_{pe}$, já que para $\theta = 0$ as soluções (2.25) ficam

$$\omega_{0\pm}^2 = \frac{1}{2}(\Omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) \pm \frac{1}{2}|\Omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2|.$$

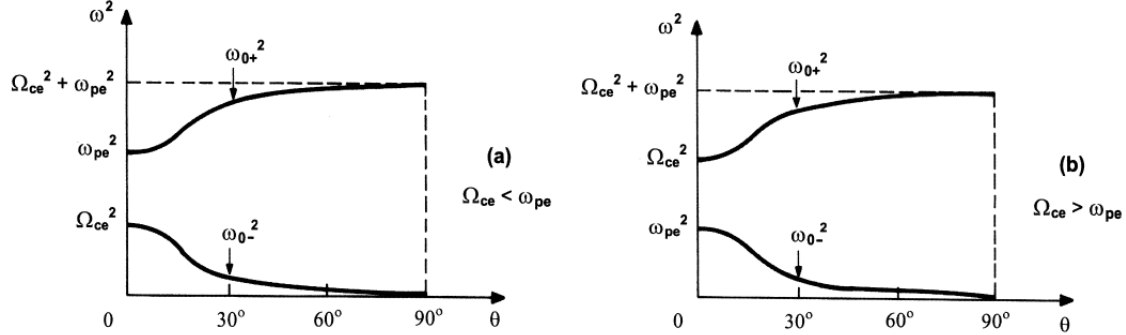


Figura 2.3: Frequências de ressonância em função do ângulo da direção de propagação em relação ao campo magnético ambiente nos casos (a) $\Omega_{ce} < \omega_{pe}$ e (b) $\Omega_{ce} > \omega_{pe}$. [1]

Quanto aos pontos de reflexão ($\eta = 0$), resulta de (2.16) a condição

$$C = 0 \\ \Rightarrow PRL = 0,$$

e suas soluções são

$$P = 0 \rightarrow \omega = \omega_{pe}, \\ R = 0 \rightarrow \omega = \omega_{02}, \\ L = 0 \rightarrow \omega = \omega_{01}.$$

Os intervalos de frequência nos quais $\eta^2 \geq 0$ definem os seguintes modos de oscilação:

- Modo *whistler* (*W*): $0 < \omega < \omega_{0-}$;
- Modo extraordinário lento (*Z*): $\omega_{01} < \omega < \omega_{0+}$;
- Modo ordinário (*O*): $\omega > \omega_{pe}$;
- Modo extraordinário rápido (*X*): $\omega > \omega_{02}$.

CAPÍTULO 3

TRAÇADO DE RAIOS E EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

3.1 Introdução

Para acompanhar a trajetória das ondas se propagando no plasma, será utilizado o método de *traçado de raios*, que consiste em seguir as frentes de onda utilizando um sistema de equações diferenciais obtidas considerando que as modificações nas propriedades das ondas ocorram de maneira *adiabática*, ao exigir que as variações espaço-temporais do plasma, ou as interações das ondas com o meio (amortecimento, instabilidade, fontes de radiação), se desenvolvam lentamente, como explicado em *Stix (1992)* [11, Capítulo 4].

3.2 Equações de Traçado de Raios

Para o estudo da propagação das ondas no plasma, as funções de onda associadas às perturbações eletromagnéticas serão da forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)e^{i\phi(\mathbf{r}, t)},$$

onde $\phi(\mathbf{r}, t)$ é a *função eikonal* (real), e $A(\mathbf{r}, t)$ é uma função que varia lentamente no espaço e tempo.

Para obter as equações que governam as evoluções temporal e espacial da radiação, é suposto que as grandezas \mathbf{k} e ω sejam quantidades *locais* das ondas; ou seja, as funções de onda são consideradas aproximadamente ondas planas, \mathbf{k} e ω sendo definidos a partir da variação de $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} d\phi &= \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial\phi}{\partial t} dt, \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}, t) &\equiv \nabla\phi, \quad \omega(\mathbf{r}, t) \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como feito em *dos Santos (2011)* [10, Seção 3.4], diferenciando $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$ parcialmente em relação a t , e aplicando o gradiente em $\omega(\mathbf{r}, t)$, as definições (3.1) geram a equação

$$\nabla\omega + \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} = 0. \tag{3.2}$$

Escrevendo as soluções da equação de dispersão $\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$ como $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$, a equação (3.2) pode ser escrita como

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial\omega}{\partial t} = 0, \tag{3.3}$$

onde $\partial/\partial\mathbf{r}$ e $\partial/\partial\mathbf{k}$ são operadores gradiente.

Utilizando o conceito de *velocidade de grupo*, aplicável a meios pouco dispersivos ([1, Capítulo 8]),

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3),

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} \quad (3.5)$$

$$\implies \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}. \quad (3.6)$$

Por último, tomando a derivada temporal de $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &\implies \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde foram utilizadas as equações (3.4) e (3.6).

3.2.1 Forma alternativa

As equações diferenciais (3.4), (3.6) e (3.7) podem ser obtidas a partir de outro formalismo, que considera \mathbf{r} e \mathbf{k} como variáveis independentes (detalhes em [10, 12]). Assim, podem ser escritas de uma forma alternativa da seguinte maneira.

Diferenciando implicitamente a equação de dispersão $\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$ em relação a \mathbf{r} e \mathbf{k} , e totalmente em relação a t :

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} = 0 \implies \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} = -\frac{\partial\Lambda/\partial\mathbf{r}}{\partial\Lambda/\partial\omega} \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{k}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = 0 \implies \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = -\frac{\partial\Lambda/\partial\mathbf{k}}{\partial\Lambda/\partial\omega} \quad (3.8b)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega} \frac{d\omega}{dt} + \underbrace{\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{=0} = 0 \implies \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial\Lambda/\partial t}{\partial\Lambda/\partial\omega} \quad (3.8c)$$

Substituindo as equações (3.8a) e (3.8b) em (3.4) e (3.6), chega-se em

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial\Lambda/\partial\mathbf{k}}{\partial\Lambda/\partial\omega}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial\Lambda/\partial\mathbf{r}}{\partial\Lambda/\partial\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial\Lambda/\partial t}{\partial\Lambda/\partial\omega}. \quad (3.9)$$

3.3 Aplicação a um Plasma Frio Magnetizado

Uma equação de dispersão como (2.15), quadrática em η^2 , pode ser fatorada como

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = (\eta^2 - \epsilon_x)(\eta^2 - \epsilon_o) = \Lambda_x \Lambda_o \quad (3.10)$$

onde ϵ_x e ϵ_o são as soluções para os modos de oscilação *extraordinário* ($\Lambda_x = 0$, $\Lambda_o \neq 0$) e *ordinário* ($\Lambda_o = 0$, $\Lambda_x \neq 0$), respectivamente. Assim, se por exemplo o modo do raio seguido for X , as derivadas das equações (3.9) podem ser escritas como

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial h} = \frac{\partial(\Lambda_x \Lambda_o)}{\partial h} = \Lambda_o \frac{\partial\Lambda_x}{\partial h} + \underbrace{\Lambda_x}_{=0} \frac{\partial\Lambda_o}{\partial h} = \Lambda_o \frac{\partial\Lambda_x}{\partial h},$$

onde h é qualquer uma das variáveis \mathbf{k} , ω e \mathbf{r} . Segue, para o modo X , as equações

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial\Lambda_x/\partial\mathbf{k}}{\partial\Lambda_x/\partial\omega}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial\Lambda_x/\partial\mathbf{r}}{\partial\Lambda_x/\partial\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (3.11)$$

já que a equação (2.15) não depende explicitamente do tempo.

3.3.1 Sistema de Coordenadas

O sistema de coordenadas adotado para escrever o sistema (3.11) será o mesmo de [10, Apêndice C]. Será utilizado o sistema retangular, e também o sistema polar de coordenadas, pois devido à simetria azimutal do campo magnético ambiente, a evolução espacial de r e k fica mantida num plano paralelo ao B_0 . Considerando o plano xz (Figura 3.1), as variáveis e operadores diferenciais ficam escritos como

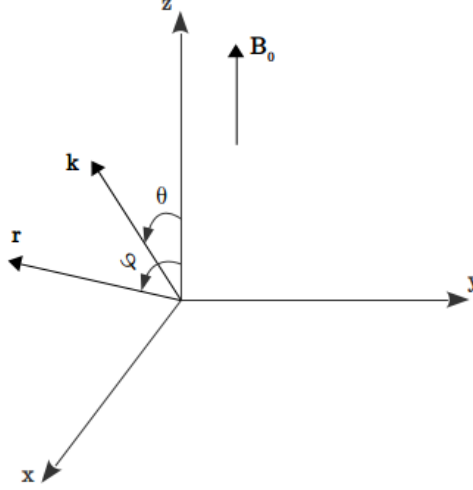


Figura 3.1: Sistema de coordenadas utilizado para escrever o sistema (3.11).

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + z\hat{z}, \quad \mathbf{k} = k\sin\theta\hat{x} + k\cos\theta\hat{z}, \quad \Lambda = \Lambda(k, \theta, x, z, \omega),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{x} + \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} = \hat{k} \frac{\partial}{\partial k} + \hat{\theta} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \theta} = \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial k} + \cos\theta \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \hat{x} + \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial k} - \sin\theta \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \hat{z}.$$

3.3.2 Sistema de Equações

Escrevendo explicitamente a equação da variável r no sistema de coordenadas,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \left(\frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \right) \quad (3.12)$$

$$= -\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{k}} \\ = -\left(\sin\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial k} + \cos\theta \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right) \hat{x} - \left(\cos\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial k} - \sin\theta \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right) \hat{z}. \quad (3.13)$$

Fazendo o mesmo com a equação para k :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{dk}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \left[\left(\frac{dk}{dt} \sin\theta + k \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \right) \hat{x} + \left(\frac{dk}{dt} \cos\theta - k \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right) \hat{z} \right] \quad (3.14)$$

$$= \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{r}} \\ = \left(\sin\varphi \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \right) \hat{x} + \left(\cos\varphi \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \right) \hat{z}. \quad (3.15)$$

Igualando as componentes dos lados direitos das equações (3.14) e (3.15), encontra-se o sistema de equações

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \left(\frac{dk}{dt} \sin \theta + k \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) = \sin \varphi \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \left(\frac{dk}{dt} \cos \theta - k \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) = \cos \varphi \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi}. \quad (3.17)$$

A partir de (3.16),

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{dk}{dt} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{d\theta}{dt} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17), resolvendo para $d\theta/dt$,

$$k \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{d\theta}{dt} = (\sin \varphi \cos \theta - \sin \theta \cos \varphi) \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi}, \quad (3.19)$$

e aplicando algumas identidades trigonométricas, chega-se em

$$k \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{d\theta}{dt} = \sin(\varphi - \theta) \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \cos(\varphi - \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi}. \quad (3.20)$$

Utilizando o resultado (3.19) em (3.18), obtém-se

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{dk}{dt} = (\sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta) \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - (\sin \varphi \cos \theta - \sin \theta \cos \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \quad (3.21)$$

$$= \cos(\varphi - \theta) \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \sin(\varphi - \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \quad (3.22)$$

Para (3.12) e (3.13), diretamente a partir da igualdade das componentes em ambos os lados das equações, é obtido o resultado

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{dx}{dt} = -\sin \theta \frac{\partial \Lambda}{\partial k} - \cos \theta \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{dz}{dt} = -\cos \theta \frac{\partial \Lambda}{\partial k} + \sin \theta \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}. \quad (3.24)$$

As equações (3.20), (3.22), (3.23) e (3.24) formam o sistema diferencial para calcular a trajetória da radiação.

3.3.3 Aplicação ao Modo Extraordinário

Alguns detalhes dos cálculos para as equações de traçado de raios estão na seção (3.5). O resultado obtido é apresentado a seguir:

$$\mathcal{F} \frac{dx_{\oplus}}{dt} = \frac{2c}{R_{\oplus}} \frac{g_x}{f} \eta \mathcal{A}_z \sin \theta, \quad (3.25a)$$

$$\mathcal{F} \frac{dz_{\oplus}}{dt} = \frac{2c}{R_{\oplus}} \frac{g_x}{f} \eta \mathcal{A}_z \cos \theta, \quad (3.25b)$$

$$\frac{R_{\oplus}}{2c} \eta \mathcal{F} \frac{d\theta}{dt} = \mathcal{B}_{\lambda} (1 - \eta^2) \lambda_{r_{\oplus}} \sin(\varphi - \theta) - \mathcal{B}_{\delta} \left[\sin(\varphi - \theta) \delta_{r_{\oplus}} + \cos(\varphi - \theta) \frac{\delta_{\varphi}}{r_{\oplus}} \right], \quad (3.25c)$$

$$\frac{R_{\oplus}}{2c} \mathcal{F} \frac{d\eta}{dt} = \mathcal{B}_{\lambda} (1 - \eta^2) \lambda_{r_{\oplus}} \cos(\varphi - \theta) - \mathcal{B}_{\delta} \left[\cos(\varphi - \theta) \delta_{r_{\oplus}} - \sin(\varphi - \theta) \frac{\delta_{\varphi}}{r_{\oplus}} \right], \quad (3.25d)$$

onde R_{\oplus} é o raio terrestre, c é a velocidade da luz no vácuo, e

$$x_{\oplus} = \frac{x}{R_{\oplus}}, \quad z_{\oplus} = \frac{z}{R_{\oplus}}, \quad r_{\oplus} = \frac{r}{R_{\oplus}}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi},$$

$$\lambda_{r_{\oplus}} = \frac{\partial \ln(B_0)}{\partial r_{\oplus}}, \quad \delta_{r_{\oplus}} = \frac{\partial \ln(n_0)}{\partial r_{\oplus}}, \quad \delta_{\varphi} = \frac{\partial \ln(n_0)}{\partial \varphi},$$

$$\mathcal{A}_x = \left(1 - \frac{f f_c (1 - \eta^2) \cos^2 \theta}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right), \quad \mathcal{A}_z = \left(1 + \frac{f f_c (1 - \eta^2) \sin^2 \theta}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right),$$

$$\mathcal{F} = 2[f_c \mu_x + 2f(2f_p^2 - f^2)]\eta^2 + (1 - \eta^2) \left[\frac{f_c \mu_x^2 + 8\nu f(f_p^2 - f^2)}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right], \quad \nu = \mu_x - f f_c,$$

$$\mu_x = f_c f \sin^2 \theta + \sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}, \quad f_p = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} \right)^{1/2},$$

$$f_c = \frac{\Omega_{ce}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e B_0}{m} \right), \quad g_x = 2f^2(f_p^2 - f^2) + f f_c \mu_x,$$

$$\mathcal{B}_\lambda = \frac{\mu_x^2 f_c / 2}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}}, \quad \mathcal{B}_s = f_p^2 \left[\frac{2(f_p^2 - f^2)(f_c \eta^2 \cos^2 \theta + \nu / f)}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} + f \eta^2 \right].$$

3.4 Equação de Transferência Radiativa

Será usado aqui o resultado de uma formulação semi-clássica, descrita em [10] detalhadamente, dos processos de emissão e absorção de ondas por partículas de um plasma magnetizado. A emissão *espontânea* de radiação é atribuída ao movimento que partículas carregadas produzem em torno de uma linha de campo magnético; e a componente *induzida* se deve à troca de energia entre os campos eletromagnéticos e as partículas.

A forma geral da equação que descreve a evolução da intensidade radiativa é aproximada por

$$\frac{d}{dt} I^X(f, \theta) = S^X + \gamma^X I^X(f, \theta), \quad (3.26)$$

onde X se refere ao modo normal extraordinário. O coeficiente de emissão induzida, γ^X , é dado por

$$\gamma^X = \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 p \hbar w^X(s, \mathbf{p}, \mathbf{k}) \left(\frac{s \omega}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} + k_\parallel \frac{\partial}{\partial p_\parallel} \right) f(p_\perp, p_\parallel), \quad (3.27)$$

onde $\mathbf{p} = (p_\perp, p_\parallel)$ é o momentum linear das partículas, e $w^X(s, \mathbf{p}, \mathbf{k})$ é a taxa de ocorrência de transições entre estados de energia das partículas, emitindo/absorvendo fótons no modo X ,

$$w^X(s, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = 8\pi^2 \frac{e^2 R_E^X(\mathbf{k})}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}^X} | \hat{\mathbf{e}}^{X*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s) |^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^X - k_\parallel v_\parallel - s \omega_{ce}). \quad (3.28)$$

Na expressão (3.28), e é a carga elementar, $\omega_{ce} = \Omega_{ce}/\gamma$ (γ : fator de Lorentz), $\omega_{\mathbf{k}}^X$ é a relação de dispersão $\omega = \omega^X(\mathbf{k}) \equiv \omega_{\mathbf{k}}^X$ do modo X (que em 2.4.2 é escrita em termos do índice de refração η), $R_E^X(\mathbf{k})$ é a fração de energia total do sistema formado pelas ondas e partículas (definido em [10, Capítulo 3]), $\hat{\mathbf{e}}^{X*}(\mathbf{k})$ é o complexo conjugado do vetor de polarização do campo elétrico,

$$\hat{\mathbf{e}}^X(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^X)}{|\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^X)|},$$

sendo $\mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)$ é definido como

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s) = \frac{s v_\perp}{k_\perp \rho} J_s(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_1 + i v_\perp J'_s(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_2 + v_\parallel J_s(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_3,$$

onde J_s é a função de Bessel do primeiro tipo.

Da expressão (3.28), nota-se que o integrando em (3.27) apenas será diferente de zero se o argumento da delta de Dirac satisfizer

$$\omega_{\mathbf{k}}^X - k_\parallel v_\parallel - s \omega_{ce} = 0,$$

chamada de *condição de ressonância*. Esta define uma curva no espaço de velocidades que, se estiver contida majoritariamente em regiões onde a função de distribuição $f(p_\perp, p_\parallel)$ contém mais gradientes positivos do que negativos, permite que a integração forneça valores positivos para a taxa de amplificação γ^X [2, Capítulo 3].

O termo S^X está relacionado com a emissividade espontânea do plasma, que é dado por

$$S^X = \frac{\omega^2 \eta_X v_g^X}{(2\pi c)^3} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 \eta_e^X(\omega, \theta; s) F_e(\mathbf{p}),$$

onde v_g^X é a velocidade de grupo do modo X , $F_e(\mathbf{p})$ é a função distribuição eletrônica (1.6), escrita em termos do momentum linear \mathbf{p} . E $\eta_e^X(\omega, \theta; s)$ é a emissividade de um elétron no s -ésimo harmônico de uma onda eletromagnética que se propaga no modo X (não confundir com o índice de refração η_X (2.21)).

Escrito a partir dos parâmetros relevantes para este trabalho (modo normal X , densidade eletrônica),

$$\begin{aligned} \frac{S^X}{m_e c^2} = & 2\sqrt{\pi} \frac{\rho^2}{R_X} \frac{f_c^2}{f^2} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Theta \left(s - \frac{f}{f_c} \right) \int_{-1}^1 d\mu \Pi_s^X(u_\pm^X, \mu) \right. \\ & \left. + \Theta \left(\frac{f}{f_c} - s \right) \Theta(1 - \mu_s^2) \int_{\mu_s}^1 d\mu \sum_{r=\pm 1} [\Pi_s^X(u_r^X, \mu) + \Pi_s^X(u_r^X, -\mu)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_s^X(u, \mu) &= \frac{\Psi_s^X(u, \mu)}{|u - \eta_X \mu \cos \theta|} \left(\frac{n_e}{n_{Te}} \frac{e^{-u^2/\beta_0^2}}{\beta_0^3} + \frac{n_{Me} g(\mu) e^{-(u-u_0)^2/\alpha^2}}{\alpha_{Ls}^3 A_u A_\mu} \right), \\ \Psi_s^X(u, \mu) &= \frac{\tau^2 u^4 (1 - \mu^2)}{\tau^2 + \cos^2 \theta} \left| \frac{f}{f_c} \left[K_X \sin \theta - \frac{|\cos \theta|}{\tau} (\cos \theta - \eta_X \mu u) \right] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right|^2, \\ \eta_X &= 1 - \frac{f_c}{f} \frac{\rho^2}{(f/f_c) + \tau}, \quad \tau = \left(s + \sqrt{\cos^2 \theta + s^2} \right) \frac{\rho^2 - (f/f_c)^2}{\left| \rho^2 - (f/f_c)^2 \right|}, \quad s = \frac{f}{2f_c} \frac{\sin^2 \theta}{\left| \rho^2 - (f/f_c)^2 \right|}, \\ R_X &= 1 - \frac{f_c}{2f} \frac{\tau \rho^2 (1 + U)}{(f/f_c + \tau)^2}, \quad U = \frac{\tau^2 - \cos^2 \theta (f/f_c)^2 + \rho^2}{\tau^2 + \cos^2 \theta (f/f_c)^2 - \rho^2}, \quad K_X = \frac{\rho^2}{(f/f_c)^2 - \rho^2} \frac{\sin \theta}{f/f_c + \tau}, \\ b_X &= \frac{f}{f_c} \eta_X u \sin \theta \sqrt{1 - \mu^2}, \quad \rho = \frac{f_p}{f_c}, \quad u_\pm^X = \eta_X \mu \cos \theta \pm \sqrt{\eta_X^2 \mu^2 \cos^2 \theta - 2 \left(1 - s \frac{\Omega_{ce}}{\omega} \right)}, \\ \mu_s^2 &= \frac{2}{\eta_X^2 \cos^2 \theta} \left(1 - s \frac{\Omega_{ce}}{\omega} \right), \end{aligned}$$

onde $J_s(b_X)$ são funções de Bessel, $\Theta(x)$ a função de Heaviside, e $g(\mu)$ está definida em (1.6).

Já o coeficiente de emissão induzida é obtido de forma explícita calculando a expressão (3.27), com $f(p_\perp, p_\parallel)$ dado por (1.6). O resultado da integração fica

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^X}{f_c} = & -2 \frac{\sqrt{\pi}}{R_X} \rho^2 \frac{f_c}{f} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Theta \left(s - \frac{f}{f_c} \right) \int_{-1}^1 d\mu Q_s^X(u_\pm^X, \mu) \right. \\ & \left. + \Theta \left(\frac{f}{f_c} - s \right) \Theta(1 - \mu_s) \int_{\mu_s}^1 d\mu \sum_{r=\pm 1} [\Theta(\cos \theta) Q_s^X(u_r^X, \mu) + \Theta(-\cos \theta) Q_s^X(u_r^X, -\mu)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} Q_s^X(u, \mu) &= \frac{H_s^X(u, \mu)}{|u - \eta_X \mu \cos \theta|} \left\{ \frac{n_e}{n_{Te}} \frac{u^2}{\beta_0^5} e^{-u^2/\beta_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{n_{Me} e^{-(u-u_0)^2/\alpha_{Ls}^2}}{n_{Te} \alpha_{Ls}^3 A_u A_\mu} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\mu - \mu_0}{\delta_s} \right) \left[\frac{u(u-u_0)}{\alpha_{Ls}^2} + \frac{\eta_X u \cos \theta - \mu}{\delta_s} \tanh \left(\frac{\mu - \mu_0}{\delta_s} \right) \right] \right\}, \\ H_s^X(u, \mu) &= \frac{\tau^2 u^2 (1 - \mu^2)}{\tau^2 + \cos^2 \theta} \left\{ \frac{f}{f_c} \left[K_X \sin \theta - \frac{|\cos \theta|}{\tau} (\cos \theta - \eta_X \mu u) \right] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right\}^2. \end{aligned}$$

3.5 Cálculos para as Equações de Traçado de Raios no Modo Extraordinário

O fator da equação de dispersão no modo extraordinário, com as soluções (2.18) e $\omega = 2\pi f$, pode ser escrito como

$$\Lambda_x = (\eta^2 - 1) + \frac{2f_p^2(f_p^2 - f^2)}{2f^2(f_p^2 - f^2) + f^2 f_c \sin^2 \theta + f f_c \sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2)^2 \cos^2 \theta}}.$$

Para facilitar os cálculos, define-se as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} D_x &= f[2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x](\eta^2 - 1) + 2f_p^2(f_p^2 - f^2), \\ g_x &= 2f^2(f_p^2 - f^2) + f f_c \mu_x, \\ \mu_x &= f_c f \sin^2 \theta + \sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2)^2 \cos^2 \theta}, \end{aligned}$$

então Λ_x pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Lambda_x &= \frac{f[2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x](\eta^2 - 1) + 2f_p^2(f_p^2 - f^2)}{2f^2(f_p^2 - f^2) + f f_c \mu_x} \\ &= \frac{D_x(f, k, \theta, \mathbf{r})}{g_x(f, \theta, \mathbf{r})}, \end{aligned}$$

e as derivadas nas equações (3.20), (3.22), (3.23) e (3.24) são calculadas utilizando

$$\frac{\partial \Lambda_x}{\partial h} = \frac{1}{g_x} \left(\frac{\partial D_x}{\partial h} - \frac{D_x}{g_x} \frac{\partial g_x}{\partial h} \right). \quad (3.31)$$

Para derivar as quantidades D_x e g_x , as derivadas parciais de μ_x são necessárias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_x}{\partial f} &= f_c \sin^2 \theta + f \frac{f_c^2 \sin^4 \theta - 8(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2)^2 \cos^2 \theta}}, \\ \frac{\partial \mu_x}{\partial \theta} &= \frac{2f_c f \mu_x - 4(f_p^2 - f^2)^2}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2)^2 \cos^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Na derivação em relação a r , as seguintes definições são feitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_c}{\partial r} &= \frac{e}{2\pi m} \frac{\partial B_0}{\partial r} = f_c \frac{\partial \ln(B_0)}{\partial r} \equiv f_c \lambda_r, \\ \frac{\partial f_p}{\partial r} &= \left(\frac{e^2}{4\pi^2 m \epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial (n_0)^{1/2}}{\partial r} = \frac{f_p}{2} \frac{\partial \ln(n_0)}{\partial r} \equiv \frac{f_p}{2} \delta_r. \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial r} = \frac{\mu_x f_c f \sin^2 \theta \lambda_r + 4(f_p^2 - f^2) f_p^2 \cos^2 \theta \delta_r}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2)^2 \cos^2 \theta}}.$$

Em relação a φ , chega-se em:

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial \varphi} = \frac{4(f_p^2 - f^2) f_p^2 \cos^2 \theta \delta_\varphi}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2)^2 \cos^2 \theta}},$$

onde

$$\frac{\partial f_p}{\partial \varphi} = \frac{f_p}{2} \frac{\partial \ln(n_0)}{\partial \varphi} \equiv \frac{f_p}{2} \delta_\varphi.$$

• **Derivadas em relação a f :**

Derivando cada termo em D_x ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial f} &= [2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x](\eta^2 - 1) + f(\eta^2 - 1) \frac{\partial[2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x]}{\partial f} + \\ &\quad + f[2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x] \frac{\partial(\eta^2 - 1)}{\partial f} + 2f_p^2 \frac{\partial(f_p^2 - f^2)}{\partial f} \\ &= [2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x](\eta^2 - 1) + f(\eta^2 - 1) \left[2(f_p^2 - f^2) - 4f^2 + f_c \frac{\partial \mu_x}{\partial f} \right] + \\ &\quad - 2\eta^2 [2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x] - 4ff_p^2,\end{aligned}$$

e em g_x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_x}{\partial f} &= 4f(f_p^2 - f^2) + 2f^2 \frac{\partial(f_p^2 - f^2)}{\partial f} + f_c \mu_x + ff_c \frac{\partial \mu_x}{\partial f} \\ &= 4f(f_p^2 - f^2) - 4f^3 + f_c \mu_x + ff_c \frac{\partial \mu_x}{\partial f}.\end{aligned}$$

Substituindo essas derivadas em (3.31), e manipulando os termos, chega-se em

$$\frac{\partial \Lambda_x}{\partial \omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Lambda_x}{\partial f} \implies \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \omega} = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= 2[f_c \mu_x + 2f(2f_p^2 - f^2)]\eta^2 + (1 - \eta^2) \left[\frac{f_c \mu_x^2 + 8\nu f(f_p^2 - f^2)}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right], \\ \nu &= -ff_c \cos^2 \theta + \sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta} = \mu_x - ff_c.\end{aligned}$$

• **Derivadas em relação a θ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial \theta} &= ff_c(\eta^2 - 1) \frac{\partial \mu_x}{\partial \theta} \\ &= ff_c(\eta^2 - 1) \left[\frac{2f_c f \mu_x - 4(f_p^2 - f^2)^2}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right] \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_x}{\partial \theta} &= ff_c \frac{\partial \mu_x}{\partial \theta} \\ &= ff_c \left[\frac{2f_c f \mu_x - 4(f_p^2 - f^2)^2}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right] \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Substituindo em (3.31):

$$\frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} = \frac{-2ff_c(1 - \eta^2)\eta^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}}.$$

• **Derivadas em relação a r :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial r} &= f(\eta^2 - 1) \frac{\partial[2f(f_p^2 - f^2) + f_c \mu_x]}{\partial r} + 2 \frac{\partial[f_p^2(f_p^2 - f^2)]}{\partial r} \\ &= \left(2f_p^2 f^2 \delta_r + \mu_x f f_c \lambda_r + ff_c \frac{\partial \mu_x}{\partial r} \right) (\eta^2 - 1) + 2f_p^2 (f_p^2 - f^2) \delta_r + 2f_p^4 \delta_r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_x}{\partial r} &= 2f^2 \frac{\partial(f_p^2 - f^2)}{\partial r} + f\mu_x \frac{\partial f_c}{\partial r} + ff_c \frac{\partial \mu_x}{\partial r} \\ &= 2f^2 f_p^2 \delta_r + ff_c \mu_x \lambda_r + ff_c \frac{\partial \mu_x}{\partial r}.\end{aligned}$$

Substituindo em (3.31), e manipulando os termos:

$$\frac{\partial \Lambda_x}{\partial r} = \frac{f}{g_x} [2\mathcal{B}_\lambda (\eta^2 - 1) \lambda_r + 2\mathcal{B}_\delta \delta_r],$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\lambda &= \frac{\mu_x^2 f_c / 2}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}}, \\ \mathcal{B}_\delta &= f_p^2 \left[\frac{2(f_p^2 - f^2)(f_c \eta^2 \cos^2 \theta + \nu / f)}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} + f \eta^2 \right].\end{aligned}$$

• **Derivadas em relação a φ :**

Com desenvolvimento similar às derivadas em relação a r , e substituindo em (3.31):

$$\frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} = \frac{f}{g_x} 2\mathcal{B}_\delta \delta_\varphi.$$

• **Derivadas em relação a k :**

Como as relações de dispersão não dependem de k , a derivada de Λ_x fica

$$\frac{\partial \Lambda_x}{\partial k} = \frac{\partial(\eta^2)}{\partial k} = 2 \frac{\eta^2}{k}.$$

• **Equações de evolução da radiação:**

Definindo da seguinte maneira os lados direitos das equações (3.23) e (3.24):

$$\begin{aligned}\sin \theta \frac{\partial \Lambda_x}{\partial k} + \cos \theta \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} &= \frac{2}{k} \eta^2 \sin \theta \left(1 - \frac{ff_c(1 - \eta^2) \cos^2 \theta}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right) \\ &\equiv \frac{2}{k} \eta^2 \mathcal{A}_z \sin \theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \theta \frac{\partial \Lambda_x}{\partial k} - \sin \theta \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} &= \frac{2}{k} \eta^2 \cos \theta \left(1 + \frac{ff_c(1 - \eta^2) \sin^2 \theta}{\sqrt{f_c^2 f^2 \sin^4 \theta + 4(f_p^2 - f^2) \cos^2 \theta}} \right) \\ &\equiv \frac{2}{k} \eta^2 \mathcal{A}_z \cos \theta.\end{aligned}$$

Definindo também as variáveis normalizadas pelo raio terrestre (R_\oplus),

$$x_\oplus = \frac{x}{R_\oplus}, \quad z_\oplus = \frac{z}{R_\oplus}, \quad r_\oplus = \frac{r}{R_\oplus},$$

as equações (3.20), (3.22), (3.23) e (3.24), substituindo as derivadas parciais calculadas anteriormente, ficam dadas pelo sistema (3.25).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 Resultados

Para a investigação do modelo, as equações de traçado de raios (3.25) e da transferência radiativa (3.26) devem ser calculadas simultaneamente. Como exemplo, uma simulação foi feita utilizando o algoritmo de Runge-Kutta de ordens 4 e 5, com os coeficiente de Cash-Karp, o qual permite resolver numericamente o sistema de equações com passo variável (Press *et al.*, 1992) [9]. As condições de contorno para os cálculos dos parâmetros do modelo da região-fonte [5, Capítulo VI, Apêndice A] estão na Tabela 4.1. Algumas expressões desse modelo estão descritos na Seção 1.3.2. As curvas de contorno para os cálculos das taxas de emissão espontânea e induzida são calculadas integrando as expressões (3.29) e (3.30), variando θ e ω . Os resultados para diferentes valores de z são mostrados na Figura 4.2, indicando valores positivos da taxa de amplificação em torno dos dois primeiros múltiplos da frequência de ciclotron. E nas Figuras 4.3 e 4.4, estão expostas as trajetórias do raio ao longo da região-fonte para condições iniciais distintas, onde se nota a presença de passagens sucessivas pelo centro da cavidade.

Para a integração da equação da transferência radiativa (3.26), a condição inicial I_0 para a intensidade é aquela obtida em [10, Capítulo 4] no equilíbrio termodinâmico. Nesse estado, a taxa de emissão espontânea é proporcional à induzida, e a taxa de variação da intensidade radiativa é nula. Segue então que a intensidade no equilíbrio é

Tabela 4.1: Condições de contorno usados para calcular os parâmetros ao longo da região-fonte.

Valor	Parâmetro
$4 R_{\oplus}$	Ponto-fonte superior
$1 R_{\oplus}$	Ponto-fonte inferior
2 keV	Temperatura paralela dos elétrons
3 keV	Temperatura perpendicular dos elétrons
10 keV	Temperatura paralela dos prótons
10 keV	Temperatura perpendicular dos prótons
0.0001 keV	Temperatura dos elétrons ionosféricos
0.0001 keV	Temperatura dos prótons ionosféricos
0.00005 keV	Temperatura dos íons O^+ ionosféricos
8000 V	Potencial elétrico no topo da ionosfera
0.8 cm^{-3}	Densidade dos elétrons magnetosféricos
0.8 cm^{-3}	Densidade dos prótons magnetosféricos
500 cm^{-3}	Densidade dos elétrons ionosféricos (N_{Ie})
600 cm^{-3}	Densidade total no ponto inferior
0.82 cm^{-3}	Densidade total no ponto superior
50000 km s^{-1}	Velocidade principal dos elétrons quentes
135°	Ângulo central na distribuição angular da horseshoe (α_0)
0.1	Parâmetro do cone de perda (\bar{g})

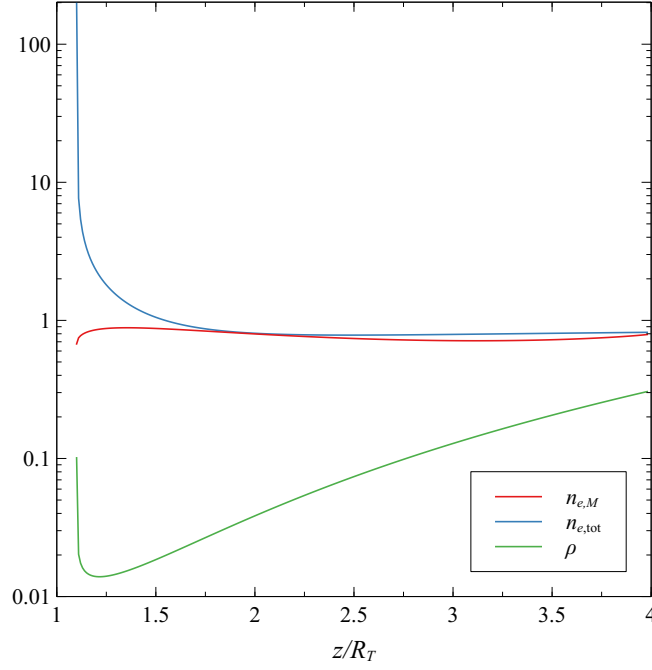


Figura 4.1: Variação ao longo de z dos parâmetros para a região-fonte obtidas com o modelo [5, Capítulo VI, Apêndice A]. $\rho = \omega_{pe}/\Omega_{ce}$, $n_{e,M}$: densidade de elétrons magnetosféricos, $n_{e,tot}$: densidade eletrônica total.

$$I_{eq}^X = -\frac{S^X}{\gamma^X} = 2\frac{k_B T_e}{f}.$$

Os resultados mostram que o modelo prevê a amplificação de ondas no modo X entre 5 e 7 ordens de magnitude acima do nível da radiação térmica de fundo I_0 . Isto corrobora as teorias mais aceitas para a geração da AKR.

4.2 Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma maneira de simular a propagação e amplificação de ondas através da região-fonte da Radiação Quilométrica Auroral. São analisadas as soluções para um sistema com as equações de movimento (2.10) e de Maxwell (2.5). São desconsiderados efeitos térmicos, e admitidas apenas pequenas perturbações em relação ao estado de equilíbrio. Esta última aproximação permite a linearização do sistema de equações. Assim, obtém-se a expressão para o modo de oscilação extraordinário rápido (X), que mais contribui nas medidas da AKR (Auroral Kilometric Radiation).

As equações diferenciais para a trajetória da radiação surgem ao aplicar a técnica de traçado de raios. O desenvolvimento envolve assumir que a amplitude das perturbações evolui lentamente em função das variações espacial e temporal, resultando no sistema (3.25). Para acompanhar a evolução da intensidade da radiação devido a sua interação com as partículas do meio, a equação da transferência radiativa (3.26) é utilizada. Seus coeficientes surgem da descrição da radiação de ciclotron de um plasma em termos de duas componentes: a emissão espontânea, devida à interação das partículas com os campos do vácuo, e a emissão/absorção induzida, associada à troca de energia entre as partículas e o campo de radiação existente.

De fundamental importância para a taxa de amplificação induzida (3.27) é a forma da função distribuição da população de partículas. Neste trabalho, a função distribuição é modelada como uma distribuição C-invertido, que fornece as regiões no espaço de velocidades com gradientes positivos necessários para taxas de amplificação positivas [7].

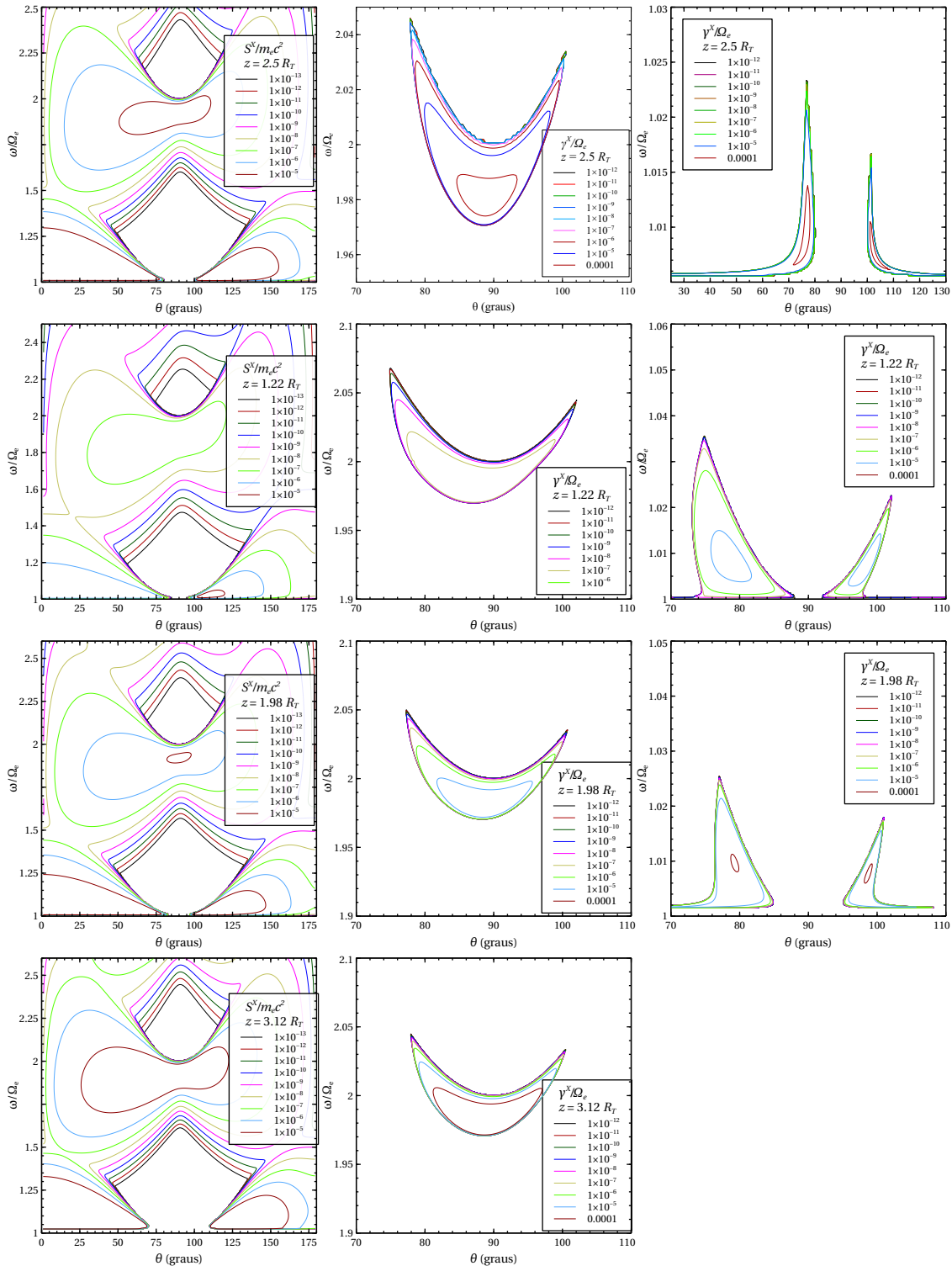


Figura 4.2: Curvas de contorno para as taxas de emissão. Primeira coluna são as taxas de emissão espontânea, enquanto as segunda e terceira colunas são as taxas de emissão induzida para o primeiro harmônico e o fundamental da frequência de ciclotron, respectivamente. Cada linha é o resultado para diferentes valores de z . Para $z = 3.12R_T$ (última linha), o modelo não forneceu valores positivos para a taxa de amplificação induzida em torno do fundamental.

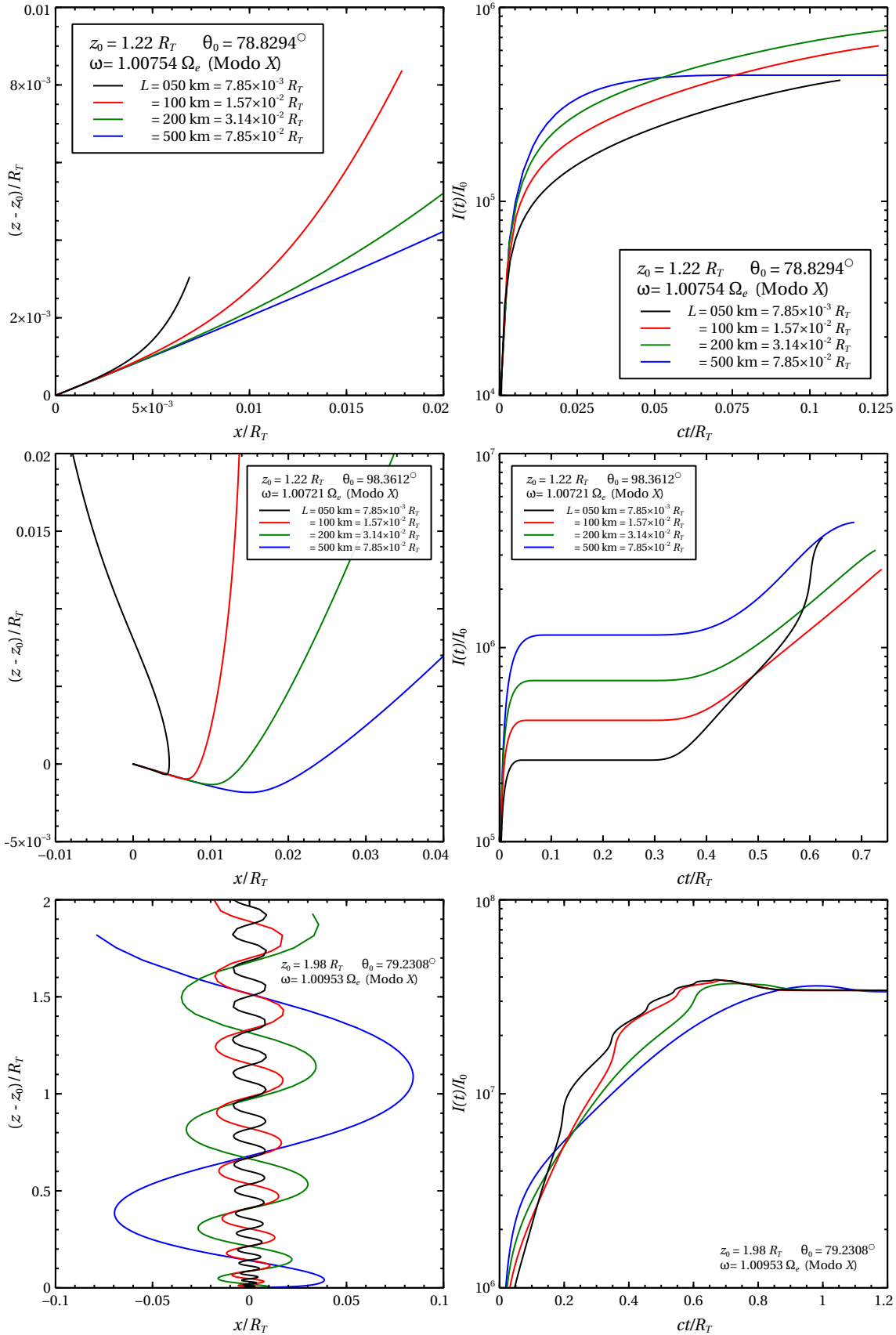


Figura 4.3: Trajetória do raio (primeira coluna) e evolução temporal da intensidade radiativa (segunda coluna). Cada linha corresponde a condições iniciais diferentes e a diferentes valores para a largura da cavidade eletrônica L , indicadas nos gráficos. Os valores de ângulo inicial θ_0 e frequência ω adotados correspondem aos valores onde ocorrem as maiores taxas de emissão estimulada γ^X no centro da cavidade, de acordo com os resultados mostrados na Figura 4.2.

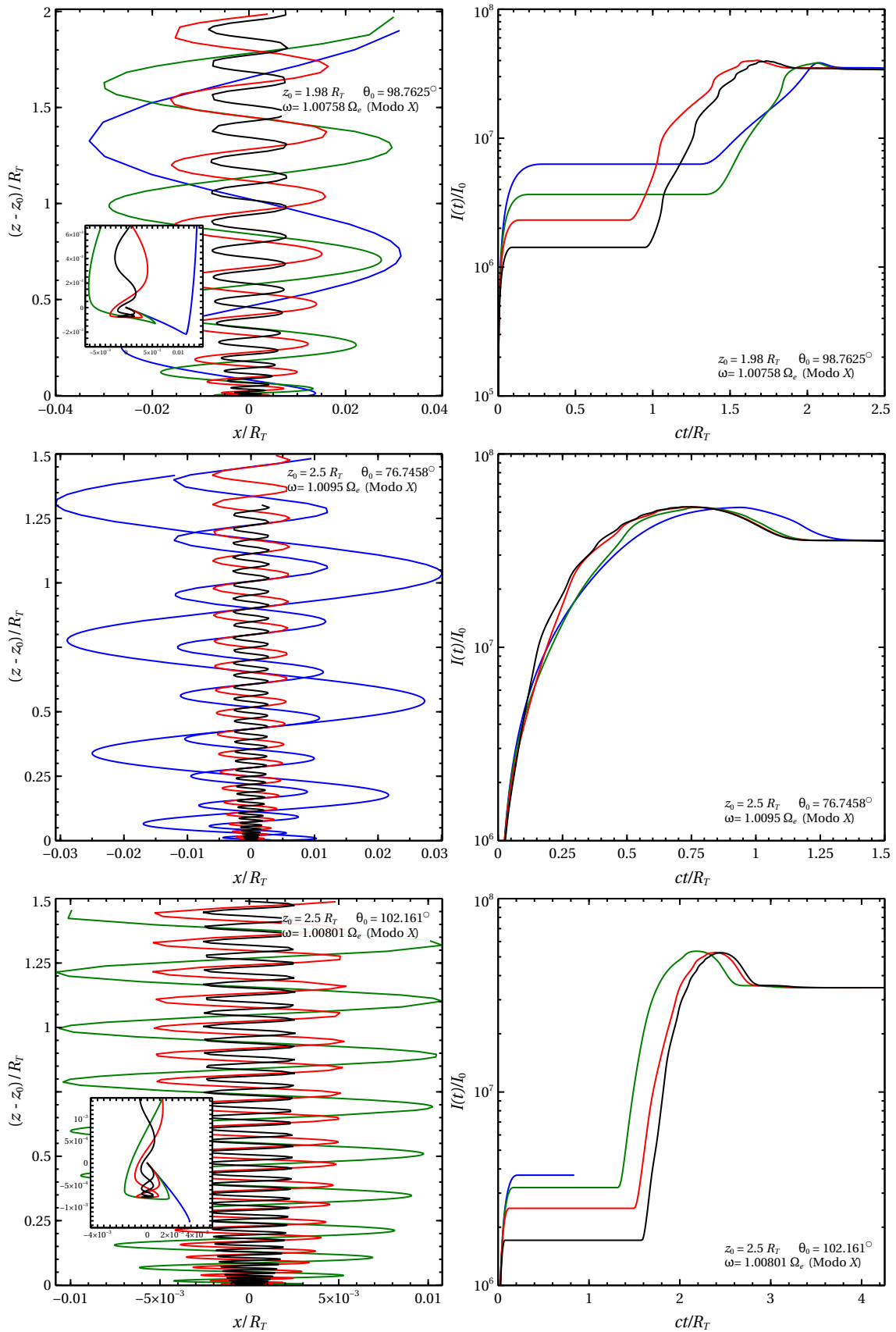


Figura 4.4: Continuação da Figura 4.3 para diferentes condições iniciais e larguras da cavidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004. 678 pp.
- [2] Cláudio José de H. Cavalcanti. *Emissão, Propagação e Amplificação da Radiação Quilométrica das Auroras nas Subcavidades Aurorais*. Tese de doutorado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre - RS, 2001.
- [3] R.E. Delory, G.T. and Ergun, C.W. Carlson, L. Muschietti, C.C. Chaston, W. Peria, J.P. McFadden, and R Strangeway. FAST observations of electron distributions within AKR source regions. *Geophysical Research Letters*, 25(12):2069–2072, June 1998.
- [4] R. E. Ergun, C. W. Carlson, J. P. McFadden, G. T. Delory, R. J. Strangeway, and P. L. Pritchett. Electron-Cyclotron Maser Driven by Charged-Particle Acceleration from Magnetic Field-Aligned Electric Fields. 538(1):456–466, July 2000.
- [5] R. Gaelzer. O Maser de Elétron-Cíclotron como Mecanismo Gerador da Radiação Quilométrica das Auroras. Master's thesis, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre - RS, abril 1991. 215 pp.
- [6] D. B. Melrose. *Plasma Astrophysics. Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas*, volume 1: The Emission, Absorption and Transfer of Waves in Plasmas. Gordon and Breach, New York, 1980. 259 pp.
- [7] D. B. Melrose and M. S. Wheatland. Is Cyclotron Maser Emission in Solar Flares Driven by a Horseshoe Distribution? 291(12):3637–3658, December 2016.
- [8] Joel Pavan. Efeitos de Gradientes Perpendiculares na Amplificação da Radiação Quilométrica das Auroras. Dissertação de mestrado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre - RS, 2007. Capítulo 3.
- [9] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, second edition, 1992.
- [10] Michel Silva dos Santos. Um Modelo Não Local para a Emissão Solar do Tipo V. Dissertação de mestrado, Instituto de Física e Matemática - UFPel, Pelotas - RS, 2011.
- [11] Thomas Howard Stix. *Waves in Plasmas*. American Institute of Physics, New York, 1992. 566 + xiv pp.
- [12] E. R. Tracy, A. J. Brizard, A. S. Richardson, and A. N. Kaufman. *Ray tracing and beyond: phase space methods in plasma wave theory*. Cambridge University Press, New York, 2014. Chapter 1.